美国新数学丛书



几何变换 2

I.M. 亚格洛姆 著

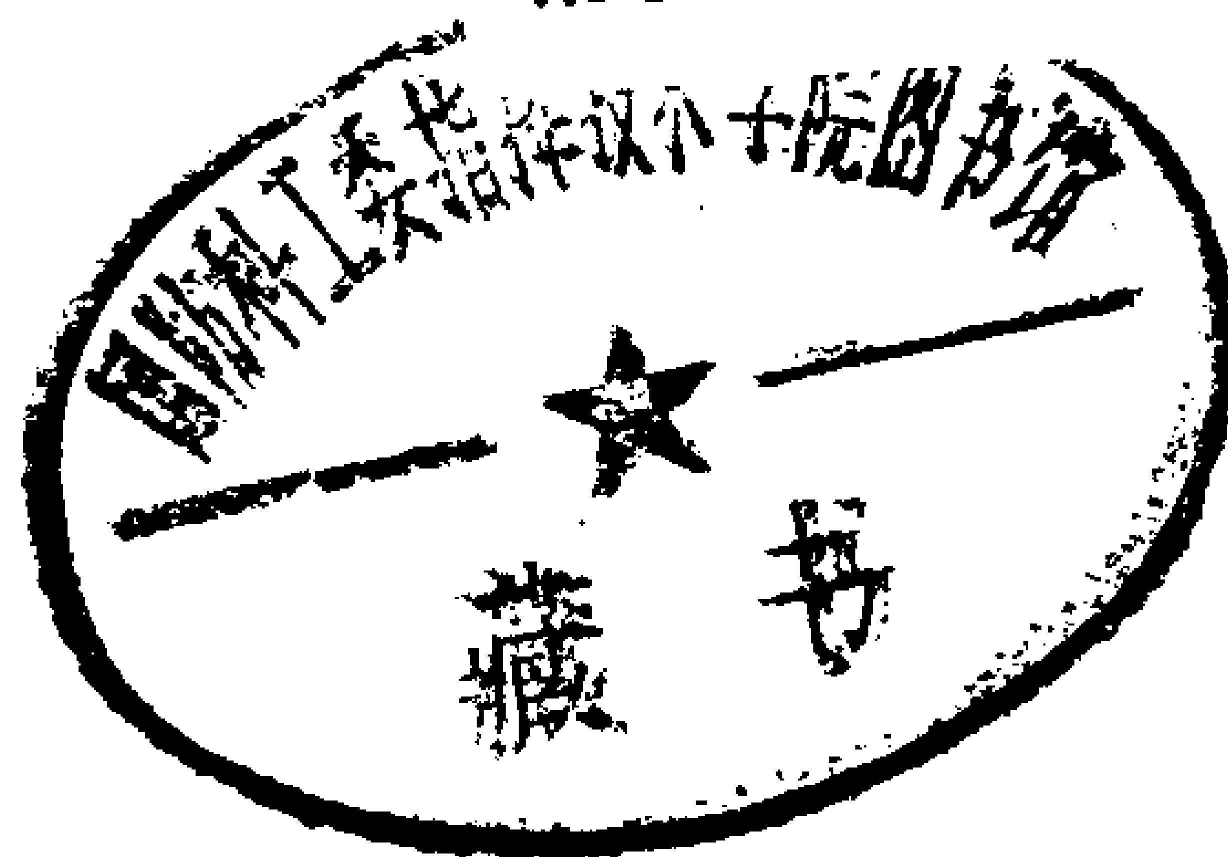
北京大学出版社

几何变换

第二册

U. M. 亚格龙　著
詹汉生　译　章学诚　校





北京大学出版社

内 容 提 要

本书是 U.M. 亚格龙所著“几何变换”一书的第二册，主要讨论几何中的相似变换. 内容大致可分为两部分：在前一部分中，作者首先讨论中心相似、螺旋相似和膨胀反射等变换，并仔细分析了它们的特征性质. 在此基础上，给出了相似变换的完全分类；后一部分着重介绍保距变换和相似变换的许多有趣的应用.

本书内容丰富，重点突出，讲述富于启发性. 在每个新概念引进或在主要定理的证明之后，都配有一定数量的习题. 书末附有全部习题的详细解答.

本书可供中学生、大学低年级学生、中学教师以及广大数学爱好者参考.

U.M. Yaglom

GEOMETRIC TRANSFORMATIONS II

几 何 变 换

第 二 册

U.M. 亚格龙 著

詹汉生 译 章学诚 校

*

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 7印张 150千字
1988年10月第一版 1988年10月第一次印刷
印数：0001－2500册
ISBN 7-301-00299-8/O·056
定价：1.50元

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学. 入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大. 一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步.

由于种种原因，数学往往被罩上一层神密的面纱. 好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套"新数学丛书"，向广大读者推荐.

和一般的通俗数学读物不同，"新数学丛书"的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题. 这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用. 内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想.

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌.

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径.

"新数学丛书"首创于一九六一年，已陆续出版近三十册.

有些书早已脱销．"新数学丛书"编委会，特别是 Anneli Lax 教授得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书．在此，我们表示衷心的感谢．

江泽涵　张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本.编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂."新数学丛书"中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围;各书的难易程度不同,甚至在同一本书里,有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂.虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书,并不需要多少专门知识,但是他必须动一番脑筋.

如果读者从来只在课堂上才遇到数学,那他就应该牢记:数学书不能读得很快,他也一定不要期望,读第一遍的时候就能理解书的全部内容.复杂的部分他应该自由地跳过去,以后再回过头来读;一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚.另一方面,内容十分熟悉的一些节可以读得很快.

学数学的最好办法是"做数学";每一本书都包含问题,其中有些可能需要很可观的思考.劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯,这样读,他会越来越觉得数学有趣味.

这套书的编印是一种新的冒险.我们愿在此申明并致谢,在准备这套书时,许多位中学师生曾慷慨协助.编辑者欢迎读者提出意见,请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N. Y, 10012.

编 辑 者

作 者 简 介

亚格龙(Яглом)1921年出生于苏联哈尔科夫市,1942年毕业于斯维尔德洛夫大学,1945 年获得副博士学位. 他早年曾在莫斯科国立大学、奥彼克霍夫-基辅教育学院等校任教. 1957 年至 1968 年任莫斯科国立教育学院的几何学教授. 1968 年以后,他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教.

他对苏联的数学教学有相当大的影响. 他还发表了许多科学论著，其中有不少被译成英文，如《Complex Numbers in Geometry》,《Couvex Figures》等等.

序　　言

（摘　译）

这部书分为两册，是专为初等几何写的．长期以来，尤其是在十九世纪，初等几何的领域里积累了极其丰富的资料．许多关于圆，三角形和多边形的美妙而意想不到的定理被证明了．在初等几何的内部，还形成了一些完整的分支，如“三角形的几何”，“四面体的几何”等等．这些分支都有各自广泛的题材，各自的习题和解题的方法．

然而，本书的目的并不是向读者介绍初等几何中那些他们所不熟悉的定理．我们认为，上面谈到的初等几何的那些发展，并不说明需要有专著来阐述它们．这是因为超出高中课程范围的大部分定理只不过是一些“古董”，它们既没有什么实用的价值，又脱离了数学发展的主流．但是，在初等几何中，除去一些具体的定理之外，还包含了两个重要的有普遍意义的思想，它们构成了几何学的一切进一步发展的基础，其重要性远远超出了几何学的界限．其中之一是演绎法和几何学的公理基础；另一个是几何的变换和几何学的群论基础．这些思想都是内容丰富和卓有成效的．例如，两者的直接发展都导致了非欧几何的产生．本书的任务是阐明这两种思想之一——几何学的群论基础．

……

我们还要对本书的特点说几句话．本书是面向十分广泛的读者的．在这种情况下，就难免为照顾一部分读者而不能顾及另一部分读者的兴趣．作者牺牲了基础较好的读者的某些兴趣，力求使本书简单明了，通俗易懂，而不去过分追求严密

性和逻辑上的精确性．例如，我们不一般地对几何变换这个概念下定义，因为尽管定义的术语在直观上是清楚的，但它总是使一些缺乏经验的读者感到困难．由于同样的原因，我们不得不避开有向角的概念，并且把有向线段的概念推迟到第二章引进，尽管这样做使得正文和习题解答中的某些论证严格地说可以认为是不完整的……．但是我们认为，基础好的读者自己能够去完善这些论证；而对于基础不那么好的读者，严密性上的欠缺不会对他们有什么妨碍．……

在术语的选用上也有同样的考虑．作者根据自己当学生时的经验确信，如果在一本书中出现大量生疏的术语，会大大增加它的难度．因此在术语的使用上尽量做得最为经济．在某些情况下，不得不放弃一些方便的术语．这样也就可能忽视了基础较好的读者的某些兴趣．……

习题给读者提供了一个检验自己对正文内容掌握情况的机会．不必按顺序解所有的习题．但是我们主张读者在每一组习题中至少选做一个（做几个更好）．本书的结构使得照这办法做的读者将不会丢失任何基本的内容．在解了（或试图去解）一个问题时，读者应当研究一下书后的解答．

习题一般不一定与正文相衔接，但解答都是用本书中的基本内容和初等几何的变换．特别注重的是解题方法而不是结论．个别的习题可能出现在几个不同的地方，因为将同一个问题的几种不同的解法加以比较，常常是有益的．

有许多作图题，在解这些题目时，我们并不去追求"最简单"（在某种意义下）的作图法．作者对这些题目的主要兴趣是在逻辑上，而实际上并不关心怎样去完成这些作图．

……　　　　U. M. 亚格龙

目　　录

前　言

什么是几何

在第一册的引言中，我们曾经把几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科；而运动则定义为不改变图形中任何两点之间距离的变换（见第一册第5页）．由于点之间距离的概念（线段的长度）看起来好象是整个几何中最重要的概念，因而图形的最重要的几何性质似乎是它的各点之间的距离．但是，如果我们仔细考察一下象基谢廖夫的教科书中所讲过的全部几何定理，我们看到点之间距离的概念几乎都不在这些定理中出现．关于平行线和垂线的所有定理（例如，“若两平行直线被第三条直线所截，则同位角相等”，或“从不在给定直线上的每个点可以向给定的直线引一条且仅能引一条垂线”），关于圆的大部分定理（例如，“过不在一直线上的三个点可以作一个且仅可作一个圆”），关于三角形和多边形的许多定理（例如，“三角形内角之和等于一个平角”，或“菱形的对角线互相垂直并且平分菱形的各个角”）都与距离的概念毫无关系．即使在那些其表述中包含有长度概念的定理中（例如，“三角形任意一个角的平分线分对边所成两部分之比等于这三角形两邻边的比”，“在给定的圆或等圆中，两条不等长的弦中的长弦离圆心更近”，或者甚至毕氏定理：“若用同一单位度量直角三角形的边，则斜边长度的平方等于两直角边长度的平方之和”），实际上起作用的并不是某个线段或某些线段

的长度,而只是两个或几个线段长度之比.只要回想一下这些定理的内容,这一点是容易确信的.例如,在毕氏定理中,起作用的不是三角形的各边的实际长度,而只是斜边长度与两直角边长度之比.这个定理说,如果直角三角形ABC的两直角边的长度为b和c,用k和l表示这些长度与斜边长度a之比(即$b/a=k, c/a=l$),则有$k^2+l^2=1$.

这背后的道理是不难理解的.线段长度的概念本质上依赖于某个固定长度单位的选取;如果我们分别用厘米,千米或英寸去度量线段,那么表示同一线段长度的数将是不同的.但是几何定理的内容不能依赖于特定的度量单位的选取.由此可见,在几何定理中长度本身不能出现,我们能遇到的只是两个或几个线段长度之比(这些比是不依赖于度量单位的选取的).因此毕氏定理中开始的那句话"若直角三角形的边用同一单位度量,则…"正是告诉我们定理说的是三角形边长之比.如果我们知道几个线段都是用同一单位度量的,而我们又不知道度量的单位是什么,那么我们只能考虑这些线段长度之比.当然,在定理的假设中要求用规定的度量单位(例如用米)去度量线段是不足取的.显然,一个定理不能仅当其中的线段用厘米去度量时是正确的,而当用英寸去度量这些线段时却是错误的.

这与下面这样一个事实是相关联的,即从几何观点看,所有的线段都是同等的,它们之中没有某一个以任何方式显得与众不同.所以从几何的观点看,所有长度单位的规定都有完全任意的性质.例如,把米规定为保存在巴黎计量局中某铂铱棒的长度;或把它规定为在某些标准条件下镉所放射出的红光的波长的1,552,734.83倍.另一个这样的例了是英国的码

最初被定为从英王亨利一世的鼻子到他伸直了的手的中指尖的距离. 因此,在几何定理的陈述中不用线段的长度而只用线段长度之比(一些不依赖于度量单位选取的量)是自然的[①].

按照我们对几何所下的定义, 应当扮演基本角色的是点之间距离的概念,实际上距离又不直接出现在几何定理中,这种情况已经由第一个给几何以严格定义的F·克莱因指出. 事实上, 克莱因的定义与第一册引言中所给的定义稍有不同. 克莱因的定义是: *几何学是研究几何图形在相似变换下不变的那些性质的学科*. 相似变换可定义为*不改变点偶之间距离之比的那种变换*. 相似变换的这个抽象的定义可以用对所有这类变换的完全的描述来代替. 这样的描述将在本书第一章§2中给出. 克莱因的定义说, 在一定意义下,几何学不仅不区分全等的图形, 而且它甚至不区分相似的图形. 事实上, 为了断定两个三角形是全等而不仅仅是相似, 我们必须始终固定一个用以度量这两个三角形边的长度单位. 正是相似图形之间的这种"不可区分性", 使得我们能把一个尺寸很大的图形描绘在一张图纸上. 当老师要求学生们把他画在黑板上的图形"准确地"画到他们的笔记本上去的时候, 老师用的正是这个原理. 当然, 如果不缩小图形的尺寸, 这是不可能办到的[②].

---

① 注意, 与线段长度相反, 角度大小常常在几何定理的陈述中出现. 这是因为角的度量单位可以纯几何地加以规定: 弧度定义为长度等于圆的半径的弧所对的圆心角. 直角可以定义为与它的补角相等的角. 线段的长度与角度的大小的这种差别, 例如可以通过下面的定理得到很好的说明: 在直角三角形中, 如果它的一个锐角等于30°, 则最短的边长与斜边长之比是 1∶2.

② 顺便提一下, 在某些场合第一册中所给的几何的定义比这里所给的要好, 关于这个问题在第三册的引言中有更充分的论述.

这样，我们知道在初等几何中基本的角色实际上是由相似变换扮演的.因此，这类变换的研究是重要的. 相似变换的研究不仅在理论上有很重要的意义，而且在解许多各种各样的问题时也是很有用的.事实上，在达方面相似变换并不亚于保距变换.我们可以用“求作一个四边形，使它与一给定的四边形相似，并且它的边经过四个给定的点”这样一个问题〔参看第二章 § 1 问题55(b)〕作为例子. 这个问题是下面三个熟知的问题的推广，而这三个问题通常是要用正方形、长方形和菱形的特殊性质来解的：

(a)作一个正方形，使它的边经过四个给定的点；

(b)作一个边长有给定比的长方形，使它的边过四个给定的点；

(c)作一个有给定角的菱形，使它的边过四个给定的点.

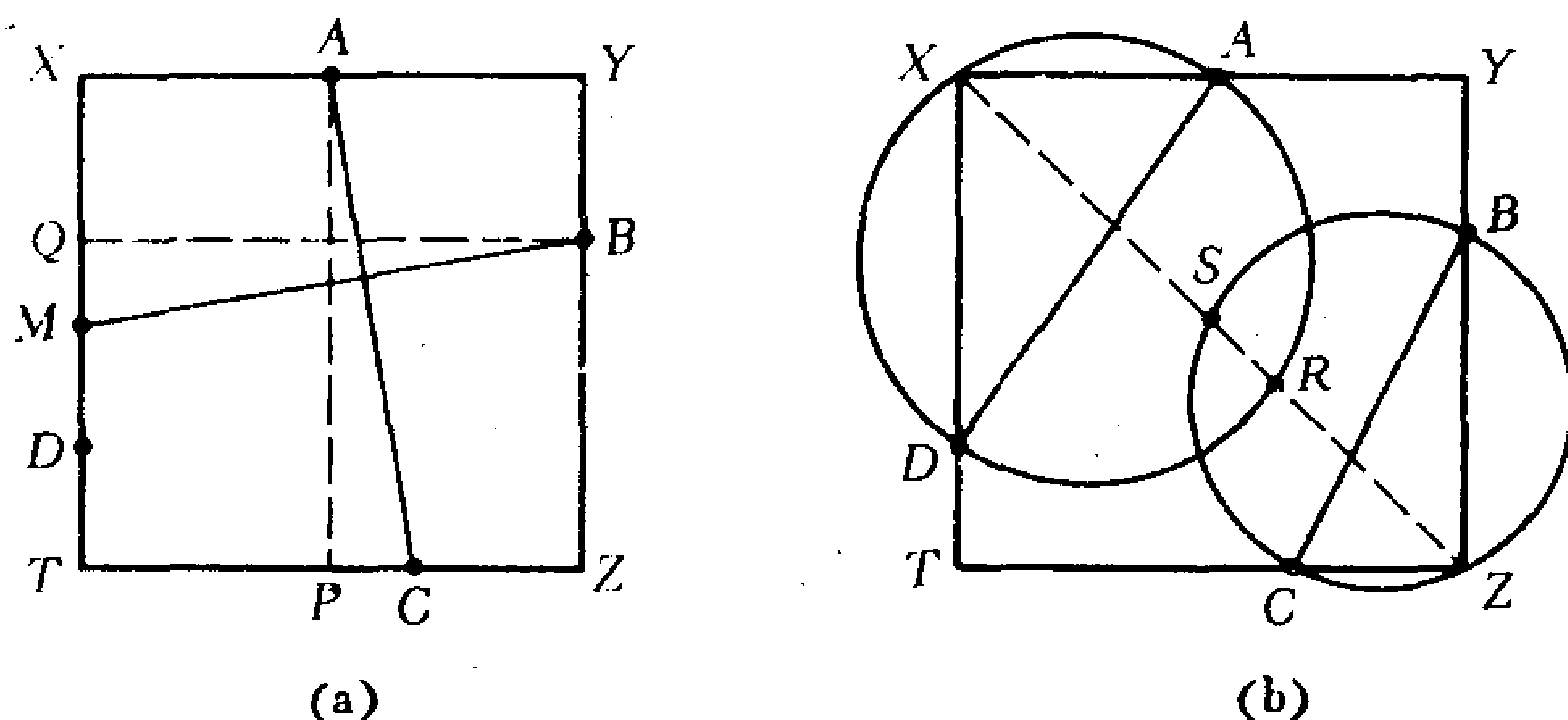
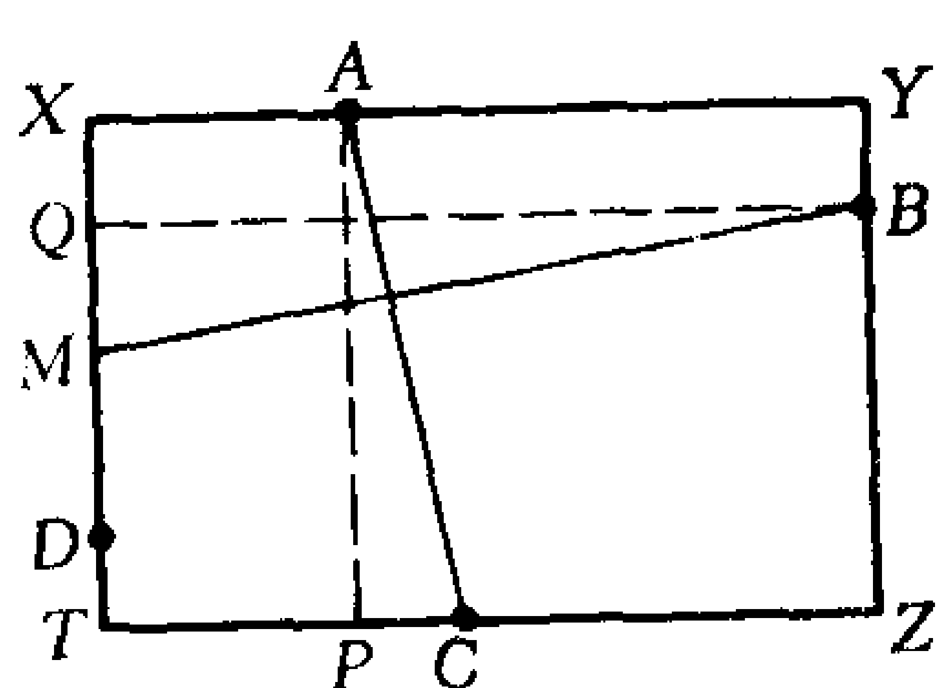


图 1

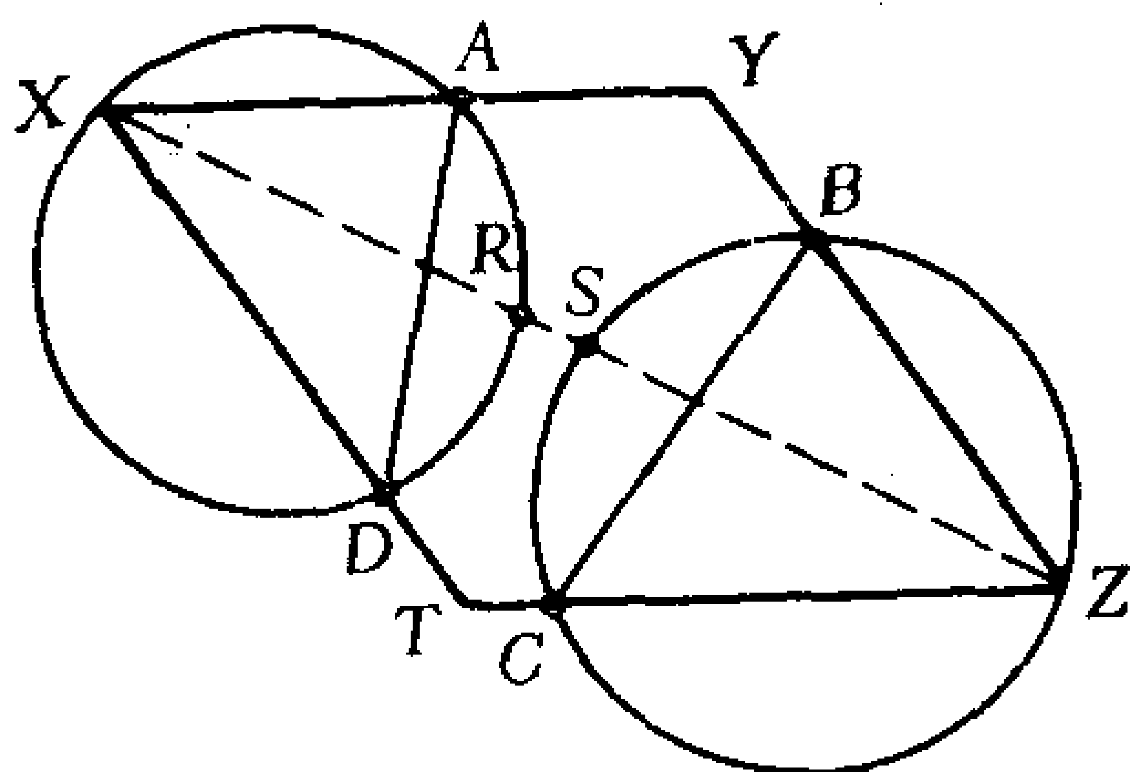
问题(a)可以用下面的方法来解：若点 A, B, C 分别在正方形 $XYZT$ 的边 XY, YZ 和 ZT 上〔图1(a)〕，并且过B垂直于AC的直线交直线 XT 于点M. 因为图1(a)中的三角形 ACP 与 BQM 全等，于是 $BM = AC$. 这样，若已知落在正方形四条边

上的四个点A, B, C, D,则我们就能在边TX上(或在它的延长线上)找到一点M,并且作出过点D和M的直线(假设$D\neq M$)TX.

这同一个问题也可以用另一种方法来解:象前面一样,命A, B, C, D是正方形的边XY, YZ, ZT和TX上的点,以AD为直径的圆过点X,命R是对角线XZ与这个圆的另一个交点.同样,以BC为直径的圆过点Z,命S是对角线XZ与这个圆的另一个交点〔图1(b)〕.因为XZ平分以X为顶点的角,点R是弧ARD的中点.同理,S是弧BSC的中点.于是XZ可以作为过这两个中点R和S(如果$R\neq S$)的直线被作出来.这直线与上述两个圆的另外两个交点就是所要求的顶点X和Z.



(a)



(b)

图 2

上面概述的第一种解法可以自然地加以推广,用来解第二个问题(b),现在$AC:BM=AP:BQ=TX:XY$是已知的〔见图2(a)〕.作正方形问题的第二种解法正好可以推广用来解第三个问题(c).但是这时这些圆弧必须张在线段AD和BC上,并且所含的圆周角等于给定菱形的角.然后和前面一样,对角线XZ作为过这两个圆弧的中点R和S的联线可以定出来〔图2(b)〕.

虽然问题(a),(b),(c)的这些解法都很漂亮，但它们都有点不自然，人们不容易想出这样一些证明.基于相似变换的一般考虑，使我们能对一个包括上面三个问题作为特例的更一般的问题，找出一个较为自然的解法.读者将会找到许多可以用相似变换来解的其它问题.

还要注意，因为保距变换是相似变换的特殊情形，许多能用保距变换来解的问题，如果改用相似变换来解，它们可以被大大地推广.例如，以一个多边形的各边为底、作有给定顶角的等腰三角形，已知这些三角形顶角的顶点，求作此多边形这样一个问题(我们在第一册中曾说过这个问题)可以推广成下面的样子：

以一个 n 边形的各边为底作 n 个三角形，使与 n 个给定的三角形相似，已知这些三角形的顶点，求作这个 n 边形(参看第一章§2中问题37).

读者在第一章中将会找到很多这样的例子.

第一章　相似变换的分类

1.　中心相似(同位相似)

我们说点 A' 是由点 A 经过中心为 O，相似系数为 k 的中心相似(或同位相似)得到的，如果 A' 在直线 OA 上，和 A 位于 O 的同侧，并且 $OA'/OA=k$〔图 3(a)〕．平面到自身的变换，

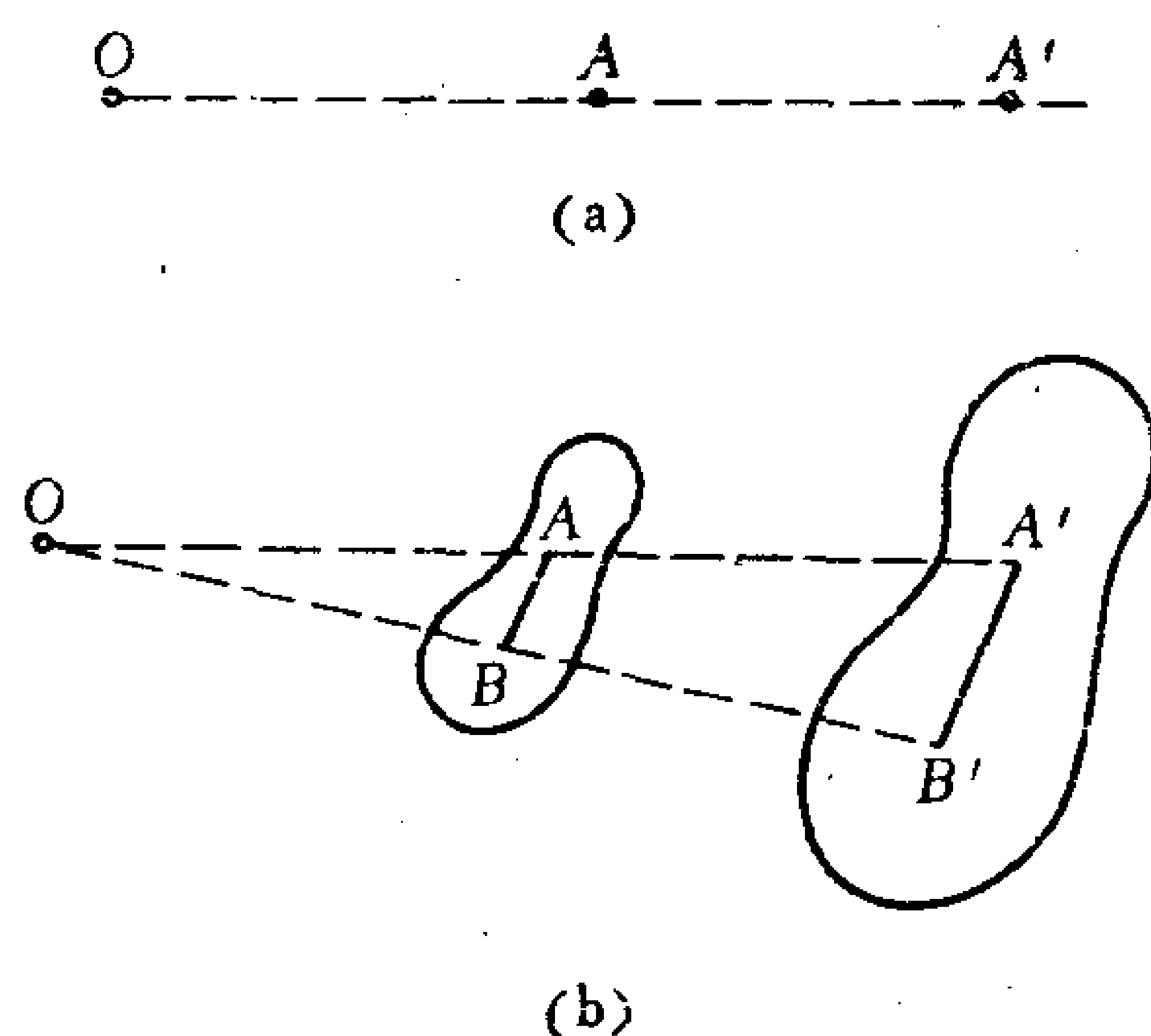
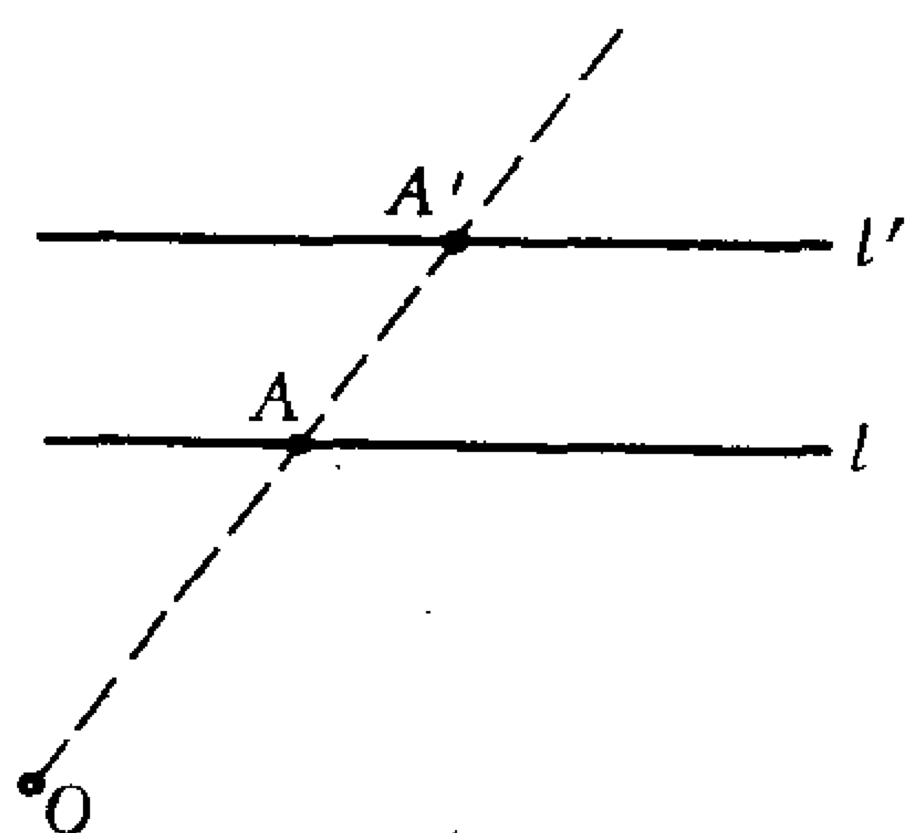


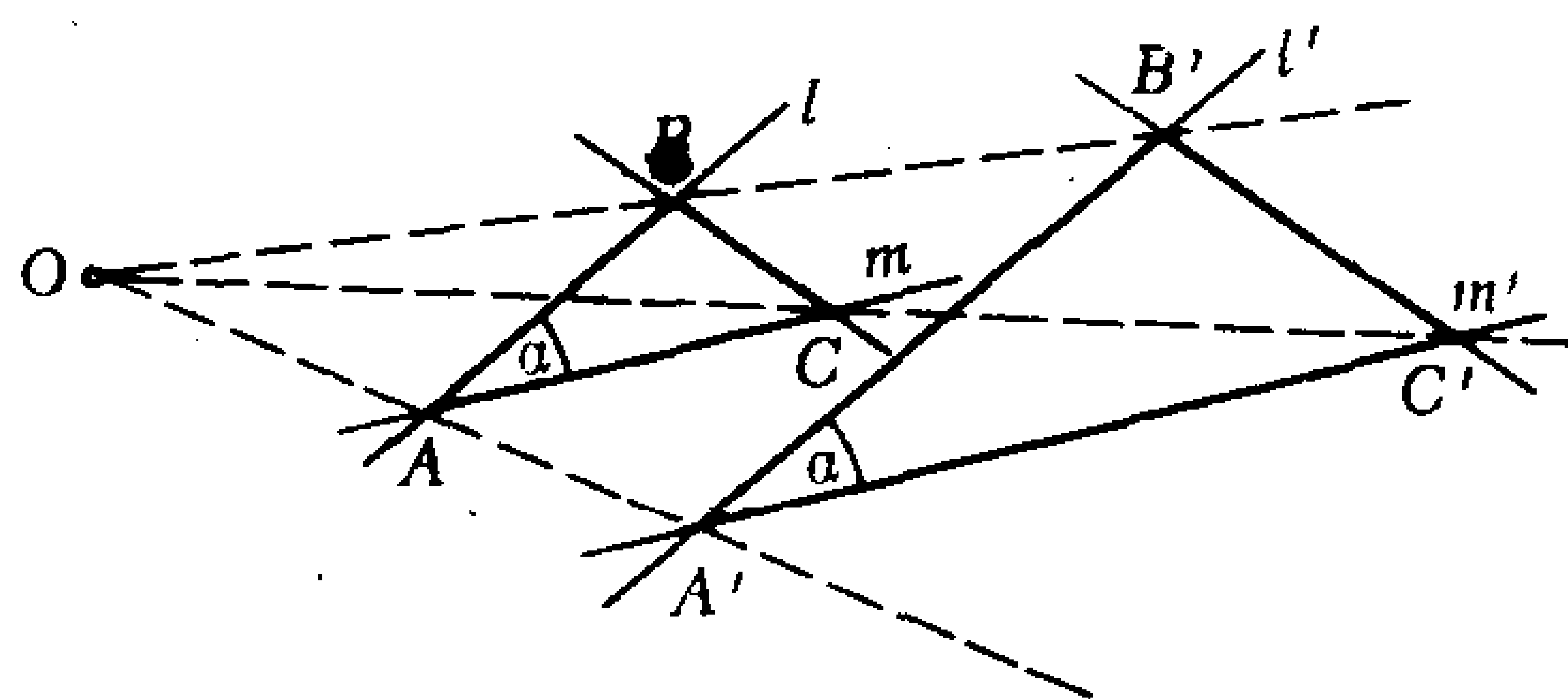
图 3

如果它把平面的每个点 A 变到由 A 经过中心为 O，相似系数为 k 的中心相似所得到的点 A'，则称这个变换为中心相似(或同位相似)．点 O 称为中心；数 k 称为这变换的系数；点 A' 称为 A 在这变换下的像．图形 F 的全部点的像构成一个图形

F'，F' 称为是中心相似于 F 的图形（有相似中心 O 和相似系数 k）〔图 3(b)〕. 显然，图形 F 也中心相似于 F'（有同样的相似中心，但相似系数为 $1/k$）. 这使得我们可以说 F 和 F' 是一对中心相似的图形. 有时也说图形 F 和 F' 是相似的①，或者说它们处于相似位置. 中心相似变换把直线 l 变成与它平行的



(a)



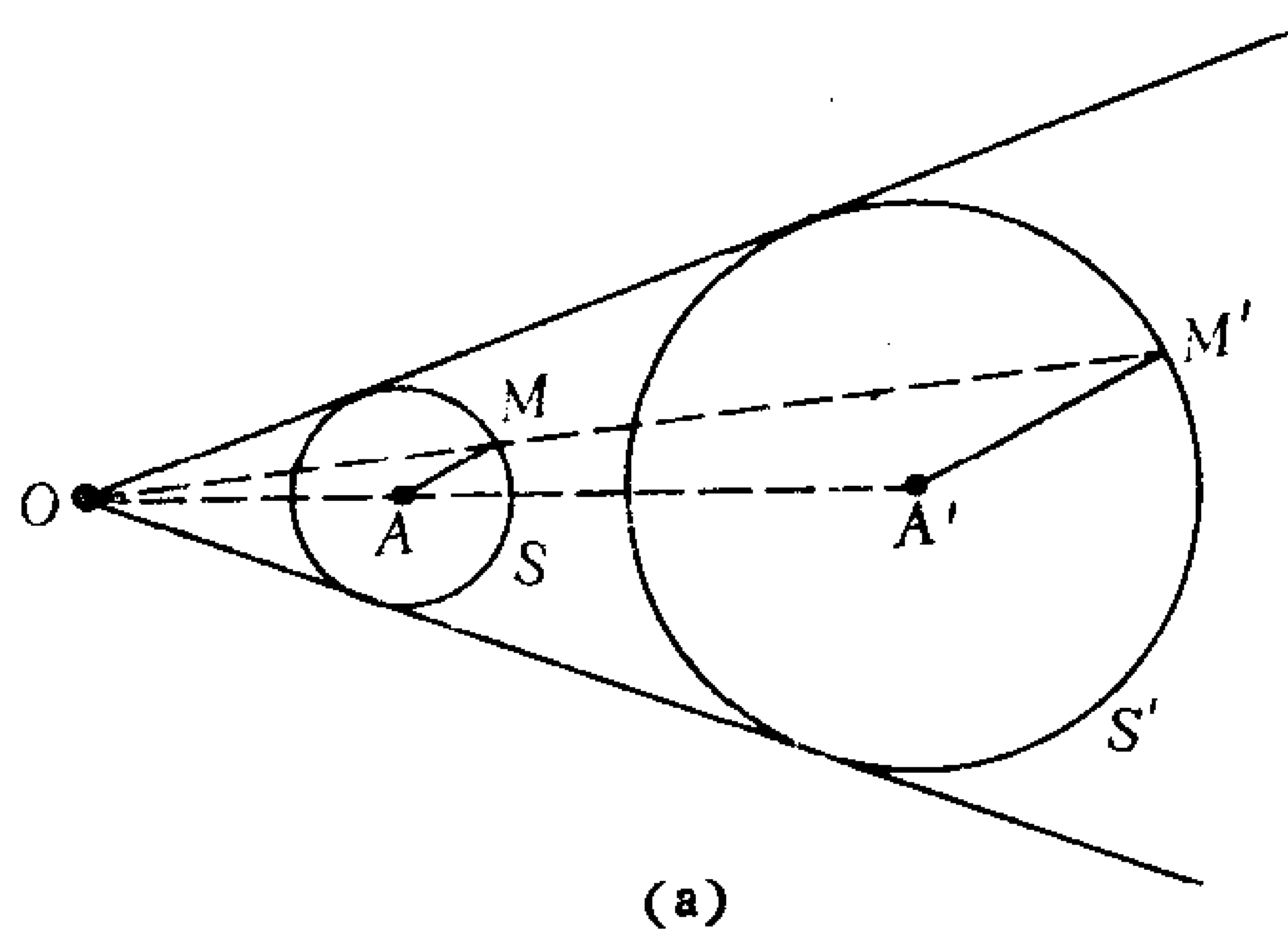
(b)

图 4

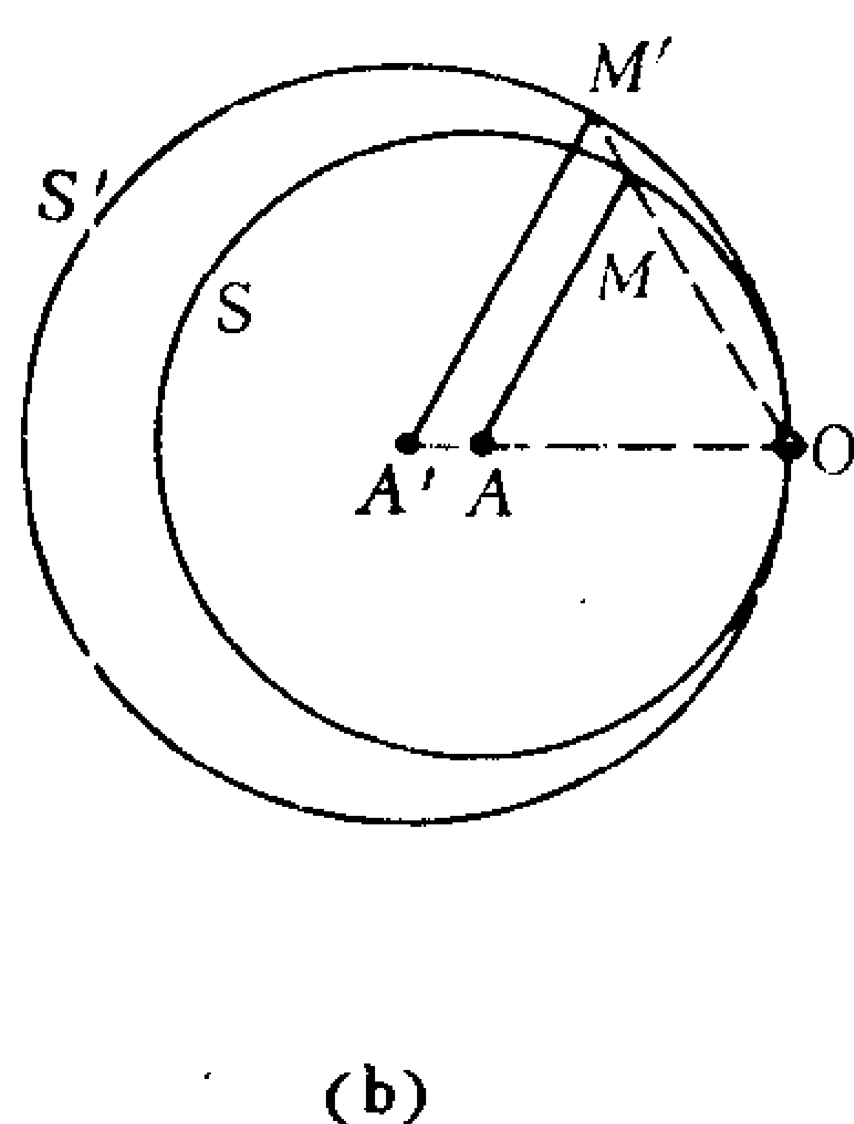
直线 l'. 为了作出 l'，只要找出直线 l 上某个点 A 在中心相似变换下的像 A'，然后再过 A' 引一条平行于 l 的直线〔图 4(a)〕. 如果两条直线 l 和 m 相交成角 α，那么它们的像 l' 和 m' 也相交成同样的角 α. 因而与给定三角形 ABC 中心相似的三角形 $A'B'C'$ 跟三角形 ABC 有同样的角，即这两个三角形是相似的〔图 4(b)〕. 一个中心在 A，半径为 r 的圆 S，经过中心

---

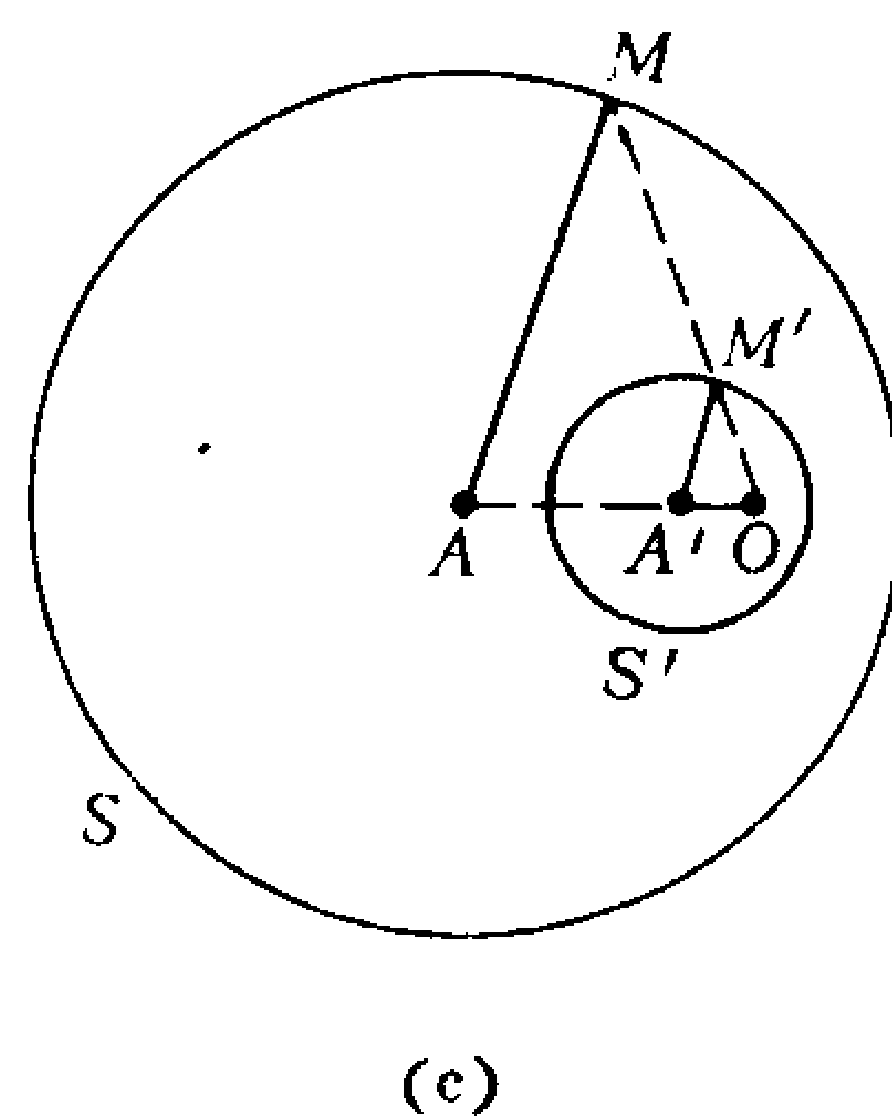
① 因为在中心相似变换下所有线段的长度都乘上同一个数 k，所以中心相似变换是引言中所定义的那种相似变换.



(a)



(b)



(c)

图 5

相似变成中心在 A'，半径为 $r'=kr$ 的新圆 S'，这里 A' 是点 A 在中心相似下的像，而 k 是相似系数（图 5）. 事实上，由三角形 OAM 和 $OA'M'$ 相似（这里 M 是 S 的任意一点，M' 是它的像）可知 $A'M'/AM=k$，即 $A'M'=kr$. 这证明圆 S 变成了中心在 A'，半径为 kr 的圆.

显然，可以认为任何两个中心分别在点 A 和 A'，半径分别为 r 和 r' 的不全等的圆 S 和 S' 是中心相似的. 这只要把直线 AA' 上位于线段 AA' 之外，并使得 $OA'/OA=r'/r$ 的点 O 作为相似中心，把比 r'/r 作为相似系数就行了（图 5）. 这个点 O 称为圆 S 和 S' 的外相似中心（对应于我们在下面将要谈到的内相似中心）. 为了作出两个不全等的圆 S 和 S' 的外相似中心 O，只须在这两个圆中引任意两条平行且有相同指向的半径 AM 和 $A'M'$，再用直线联 M 和 M'. O 就是 AA' 和 MM' 的交点. 如果这两个圆中较小的圆不在较大的圆的内部，则外相似中心也可以作为它们的外公切线的交点确定出来〔图 5(a)〕；如果 S 和 S' 内切，则相似中心与切点重合〔图 5(b)〕.

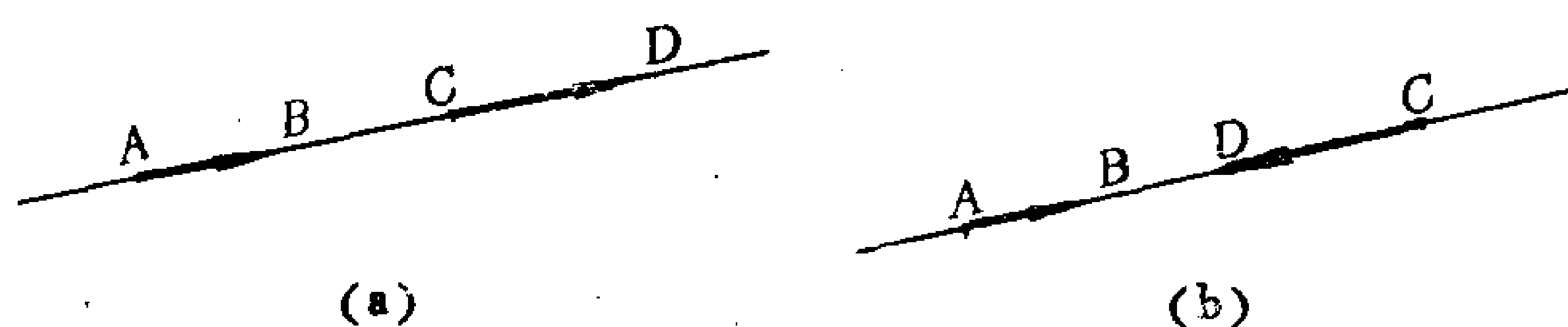


图 6

把在同一条直线上的两个线段 AB 和 CD 之比认为有确定的符号常常是方便的：当线段 AB 和 CD 的方向（即从点 A 到 B 的方向和从点 C 到 D 的方向）相同时〔图6(a)〕，认为比 AB/CD 是正的，而当它们的方向相反时〔图6(b)〕，认为比 AB/CD 是负的. 显然，在这里线段端点的次序是本质的. 例如，$BA/CD=-AB/CD$. 关于线段之比的符号的这个规定，对很多

几何问题是方便的，以后我们将要用到它①. 如果我们承认这

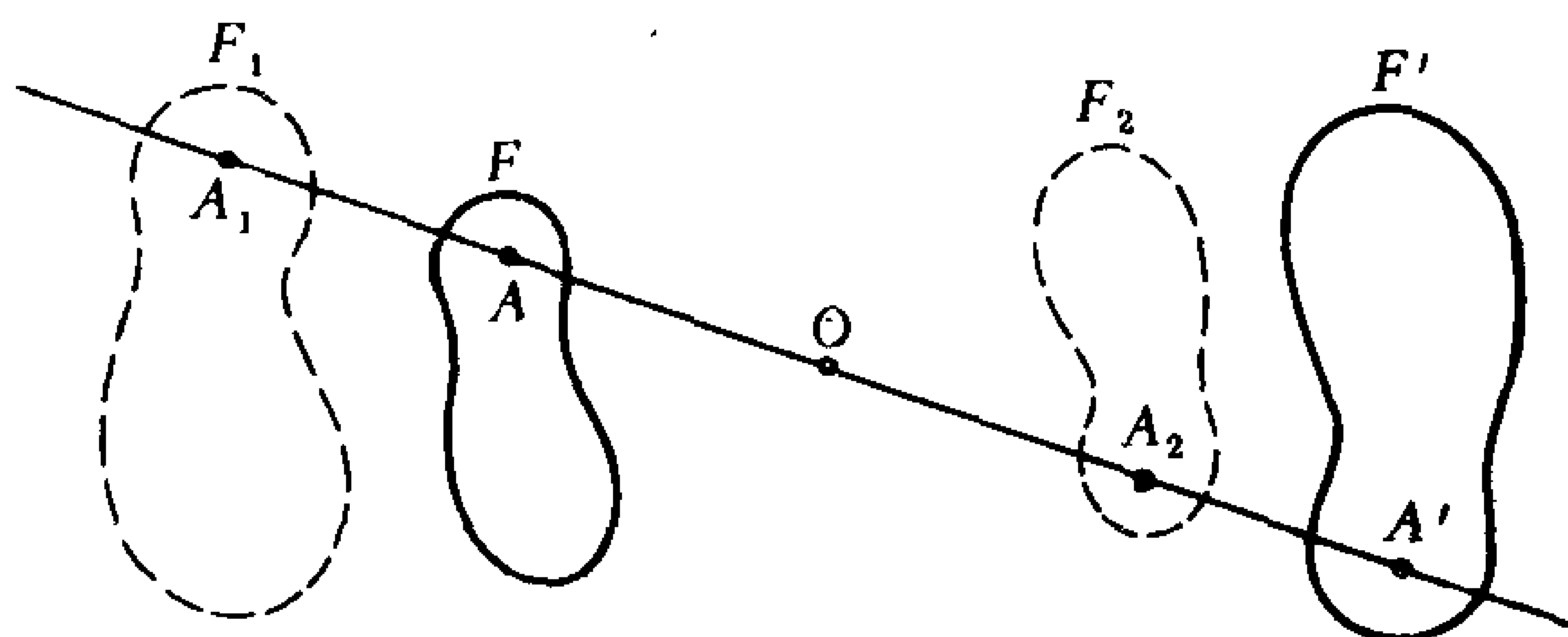


图 7

个规定，那么两个中心相似图形的相似系数就可以是正的或负的. 换句话说，两个图形 F 和 F' 称为是以 O 为相似中心，$-k$（负的！）为相似系数中心相似的，如果这两个图形的每一对对应点 A 和 A' 在一条过 O 的直线上，位于 O 的两侧，并且线段 OA' 和 OA 的长度之比等于 k（图 7）；这个条件可写成 $OA'/OA=-k$. 一个以 O 为相似中心，有负相似系数 $-k$ 的中心相似，与先作一个以 O 为中心，有正相似系数 k 的中心相似〔把图形 F 变到 F_1，见（图 7)〕，然后将平面作关于点 O 的中心对称（把 F_1 变到 F'）；或者先将平面作关于点 O 的中心对

---

① 线段比的符号的这个定义可以解释如下：在直线上选取某个方向作为正向（它可以用直线上的一个箭头来表示）. 直线上的线段 AB 被认为是正的，如果它的方向（从点 A 到点 B）是正向，否则认为它是负的（参看第一册 P. 14－15). 于是，两线段之比可以是正的，也可以是负的. 容易看出，这个比与直线上正方向的特别选取无关. 如果线段 AB 和 CD 有相同的符号（即两个线段或者都是正的，或者都是负的）则比 AB/CD 是正的，如果两线段符号相反（即一个线段是正的，而另一个是负的）则比是负的.

带有确定符号的线段的比，可以用向量的语言定义如下：$AB/CD=k$，其中 k 是使得 $AB=kCD$ 成立的正数和负数.

称（把图形 F 变到 F_2，见图 7）再接着作一个以 O 为中心，有正相似系数 k 的中心相似（把 F_2 变到 F'），所得出的变换是相同的. 因而，具有负相似系数 $-k$ 的中心相似，是一个有同样中心 O 和正系数 k 的中心相似与一个关于点 O 的中心对称变换之和①，这个和与两个变换施行的次序无关. 以后当谈到中心相似时，我们总是认为相似系数可以是正的，也可以是负的. 有负相似系数 $-k$ 的中心相似也把直线 l 变成直线 l'（但是，现在相似中心在直线 l 和 l' 之间，见图 8），并且也把圆 S 变成另一个圆 S'（圆 S' 的中心 A' 以 $-k$ 为相似系数，中心相似于圆 S 的中心 A，并且两圆半径之比 r'/r 等于 k，见图 9）. 任何两个圆 S 和 S' 都是中心相似的，它们有负相似系数 $-r'/r$（其中 r 和 r' 是两个圆的半径），相似中心 O 在它们圆心的联线 AA' 上，并且使得 $OA'/OA=-r'/r$. 点 O 在线段 AA' 内，称为圆 S 和 S' 的内相似中心. 为了找出两个圆 S 和 S' 的内相似中心，只须在这两个圆中引任意两条平行并且反向的半径 AM 和 $A'M'$，O 就是 AA' 和 MM' 的交点（图 9）. 如果 S 和 S' 不相交，则它们的内相似中心也就是两

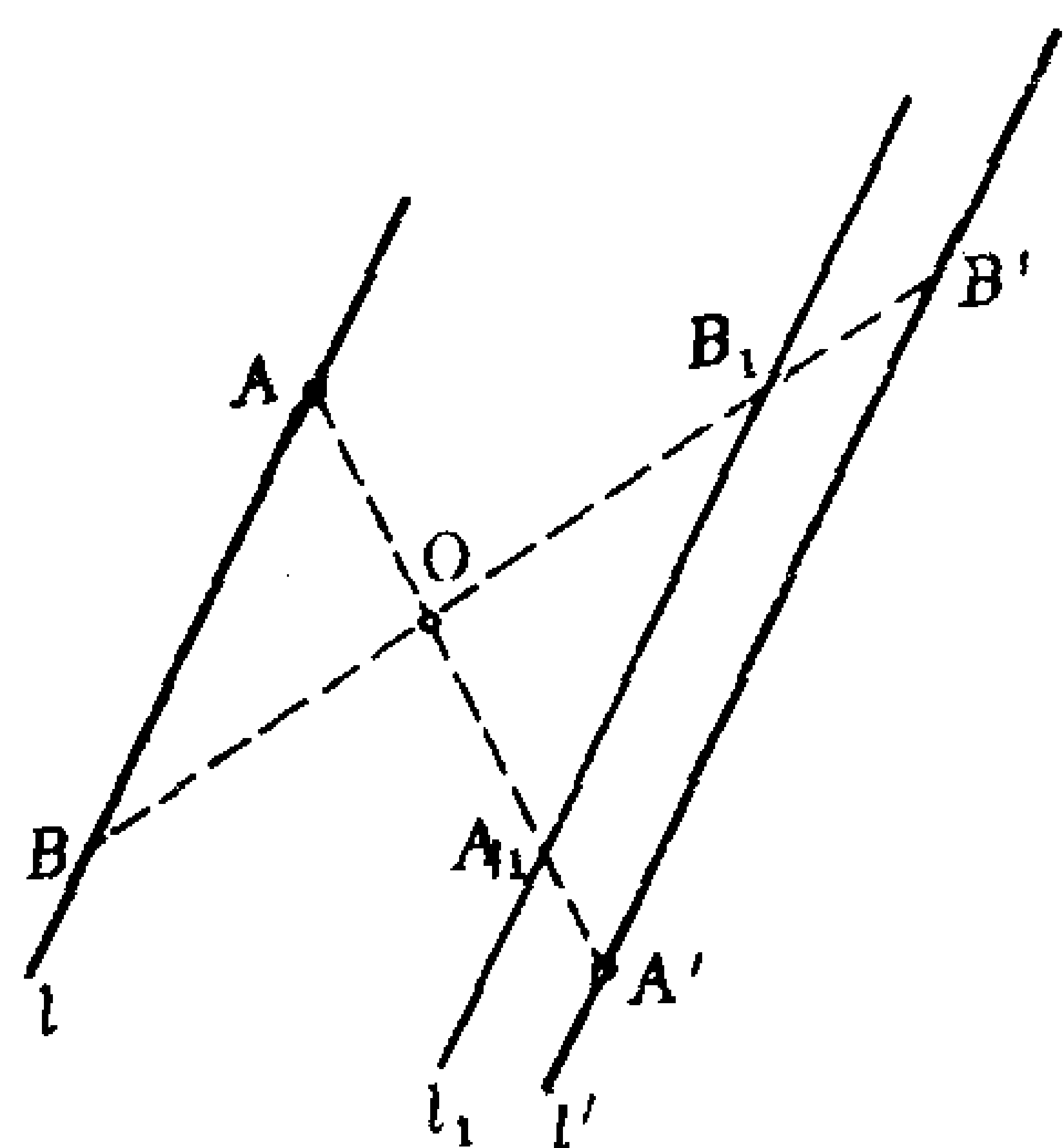


图 8

---

① 先作变换 $f: A\to A'$ 接着再作另一个变换 $g: A'\to A''$，所得的结果是复合变换 $g\circ f: A\to A''$；通常称它为 f 和 g 的乘积 $g\circ f$，但是在本书中称它为 f 与 g 的和.

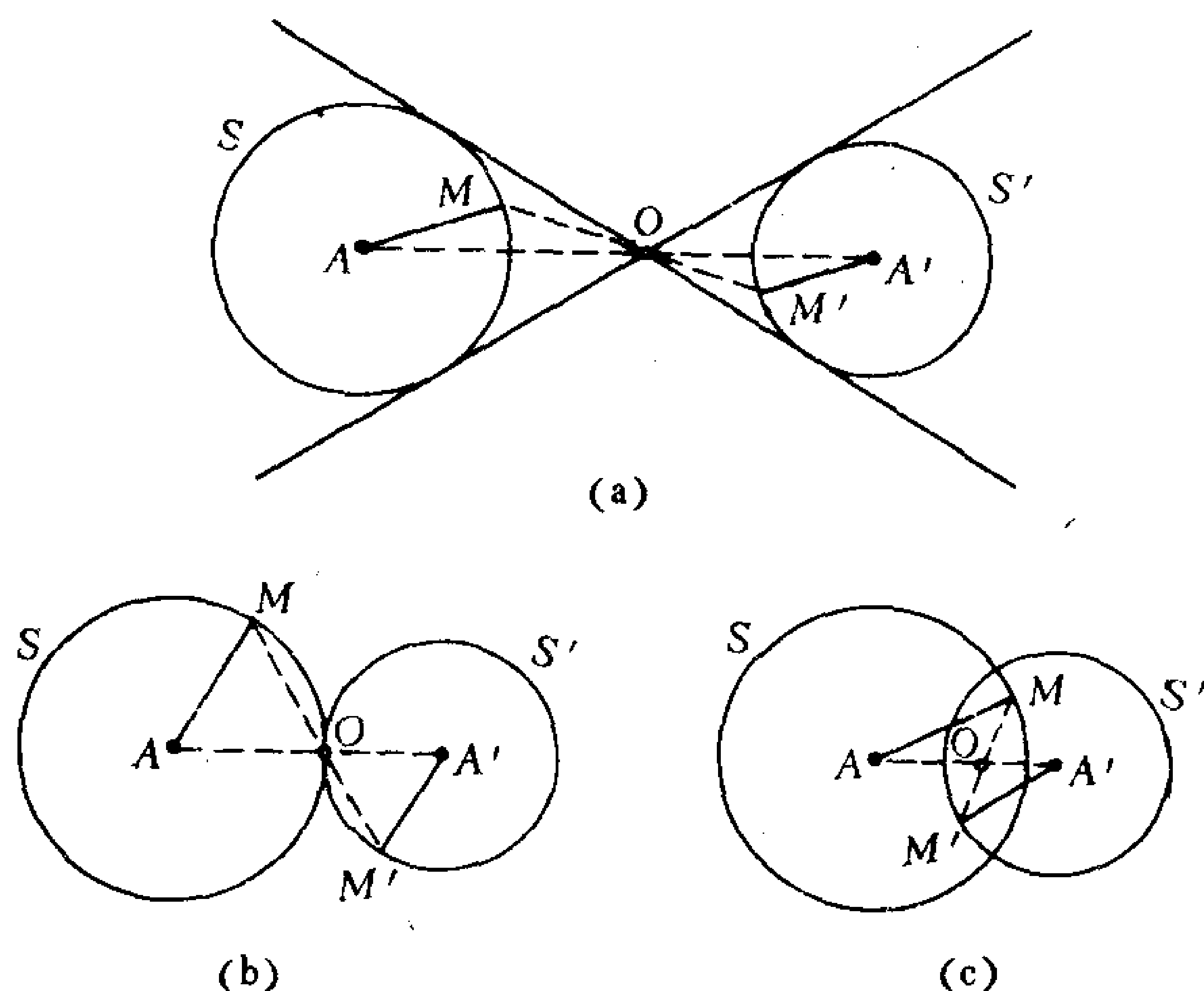


图 9

圆的内公切线的交点〔图 9(a)〕；如果 S 和 S' 外切，则 O 是切点〔图 9 (b)〕. 这样，任何两个不全等的圆可按如下两种方式看作是中心相似的：相似系数可以认为是 r'/r 或 $-r'/r$. 两个全等的圆只以一种方式中心相似，相似系数为 -1. 对于两个同心圆(并且仅对同心圆)外相似中心和内相似中心彼此重合，并且与这两个圆的中心重合.

不是恒等变换的中心相似（恒等变换可以看作是中心相似的特殊情形，它的相似系数 $k=1$）仅有的不动点是中心 O，它的不动直线是所有过 O 的直线.

如果中心相似的系数是 -1，那么这个变换就是关于相似中心的中心对称. 因而，关于某个点的中心对称是中心相似的一种特殊情形. 利用这一点，我们可以推广第一册中那些用中

心对称方法解的问题 9—11. 为了解这些更一般的问题，我们必须用比中心对称更为一般的中心相似. 例如，在问题 9 中我们可以要求“所作直线在给定的直线和圆之间的线段被点 A 分成给定比 m/n”；在问题 10 (b) 中我们可以要求“当所求直线被圆 S_1 和 S_2 截下的弦的长度分别乘以给定的数 m 和 n 时，它们的差有给定的值”；在问题 11 中我们可以要求“点 J 把弦 CD 上的线段 EF 分成比 m/n”. 这些新的问题的解法与问题 9—11 的解法是类似的. 我们把它们留给读者自己去完成.

1. 给定两直线 l_1,l_2 和一点 A. 过 A 引直线 l，使得这直线被 l_1和l_2 截得的线段 BC 满足 $AB:AC=m:n$.

2. (a) 给定圆 S 和 S 上一点 A，找所有经过 A 的弦的中点的轨迹.

(b) 给定圆 S 和 S 上面的三个点 A,B,C，作弦 AX，使得它被弦 BC 平分.

3. 给定两个相切的圆 R 和 S. 设 l 是过切点 M 的直线，它与 R 交于另一个点 A，与 S 交于另一个点 B. 证明 R 在点 A 处的切线平行于 S 在点 B 处的切线.

4. 设 R 和 S 是两个互不相交的圆，任何一个都不在另一个的内部. 设 m，n 是圆 R 和 S 的两条外公切线，M 是 m 和 n 的交点. 设 l 是过 M 的直线，交 R 于点 A,B，并且交 S 于点 C，D. 最后，命 E 是 m 和 R 的切点，F 是 m 和 S 的切点. 证明：

(a) 三角形 ABE 相似于三角形 CDF；

(b) 三角形 ABE 和三角形 CDF 的面积之比等于 R 和 S 的半径之比的平方；

(c) 由三角形 ABE 和 CDF 的中线交点所决定的直线经过点 M.

5. 设 $ABCD$ 是梯形，它的边 AD 和 BC 延长后交于点 M. 命 N 是对角线 AC 和 BD 的交点. 证明：

(a) 三角形 ABM 的外接圆 R 和三角形 DCM 的外接圆 S 相切.

(b) 三角形 ABN 的外接圆 R_1 和三角形 CDN 的外接圆 S_1 相切.

(c) R_1和S_1 的半径之比等于 R 和 S 的半径之比.

6. (a) 以梯形 $ABCD$ 的两平行边 AB 和 CD 为底作等边三角形 ABE 和 CDF. 要求这些三角形作在它们底边的同一侧(即如果把 AB 和 CD 看作是水平的，则这两个三角形或者都在底边的上面或者都在底边的下面). 证明直线 EF 过梯形的两条不平行边延长线的交点.

(b) 在梯形的平行边 AB 和 CD 上向梯形外作正方形. 证明联结这两个正方形中心的直线过梯形对角线的交点.

7. 证明梯形的两平行边中点的连线过其它两边延长线的交点以及对角线的交点.

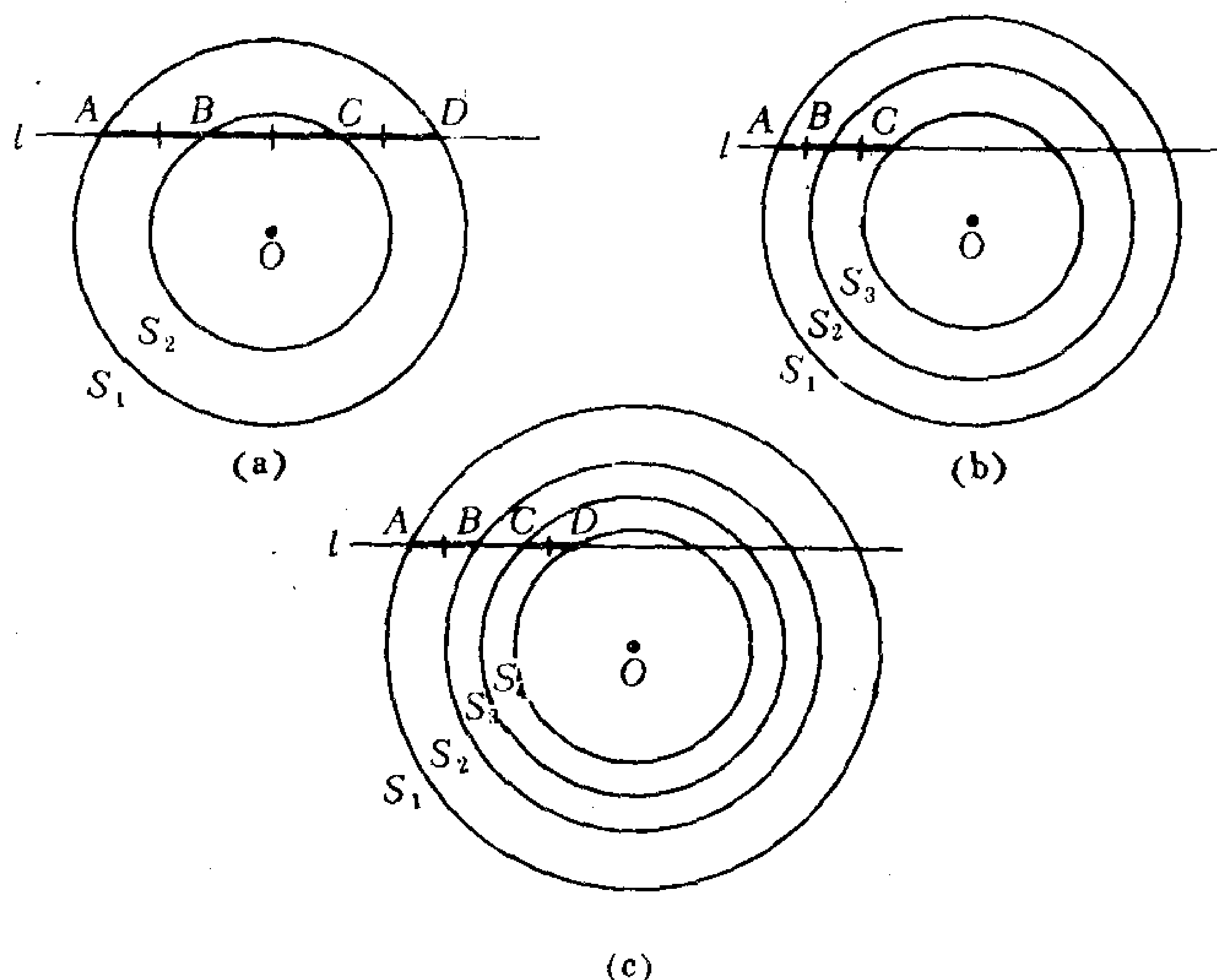
注：可参看第三册第一章第一节的问题 108.

8. (a) 给定两个同心圆 S_1和S_2. 作直线 l 依次交这两圆于点 A,B,C,D，使得 $AB=BC=CD$〔图 10(a)〕.

(b) 给定三个同心圆 S_1,S_2和S_3. 作直线 l 依次交 S_1,S_2,S_3 于点 A,B,C，使得 $AB=BC$〔图 10(b)〕.

(c) 给定四个同心圆 S_1,S_2,S_3 和 S_4. 作直线 l 分别交 S_1,S_2,S_3,S_4 于点 A,B,C,D，使得 $AB=CD$〔图 10(c)〕.

9. (a) 在给定的三角形 ABC 中，作内接正方形，使得它



(c)

图 10

的两个顶点在底边 AB 上，而其它两个顶点分别在边 AC 和 BC 上.

(b) 在给定的三角形 ABC 中，作内接三角形，使它的边分别平行于三条给定的直线 $l_1, l_2, l_3$①.

问题 10(c)是问题 9(b)的推广.

10. (a) 给定两条直线 l_1, l_2 以及 l_1 上的一点 A 和 l_2 上的一点 B. 在直线 l_1和l_2 上分别作线段 AM_1和BM_2 使得它们有给定的比 $AM_1/BM_2 = m$. 过点 M_1和M_2 作直线分别平行于两条

---

① 给定多边形的内接多边形是指这样的多边形，它的所有顶点都在给定的多边形的边或其延长线上(每条边上至少有一个顶点).

给定的直线 l_3和l_4（图 11）. 求所作直线交点的轨迹.

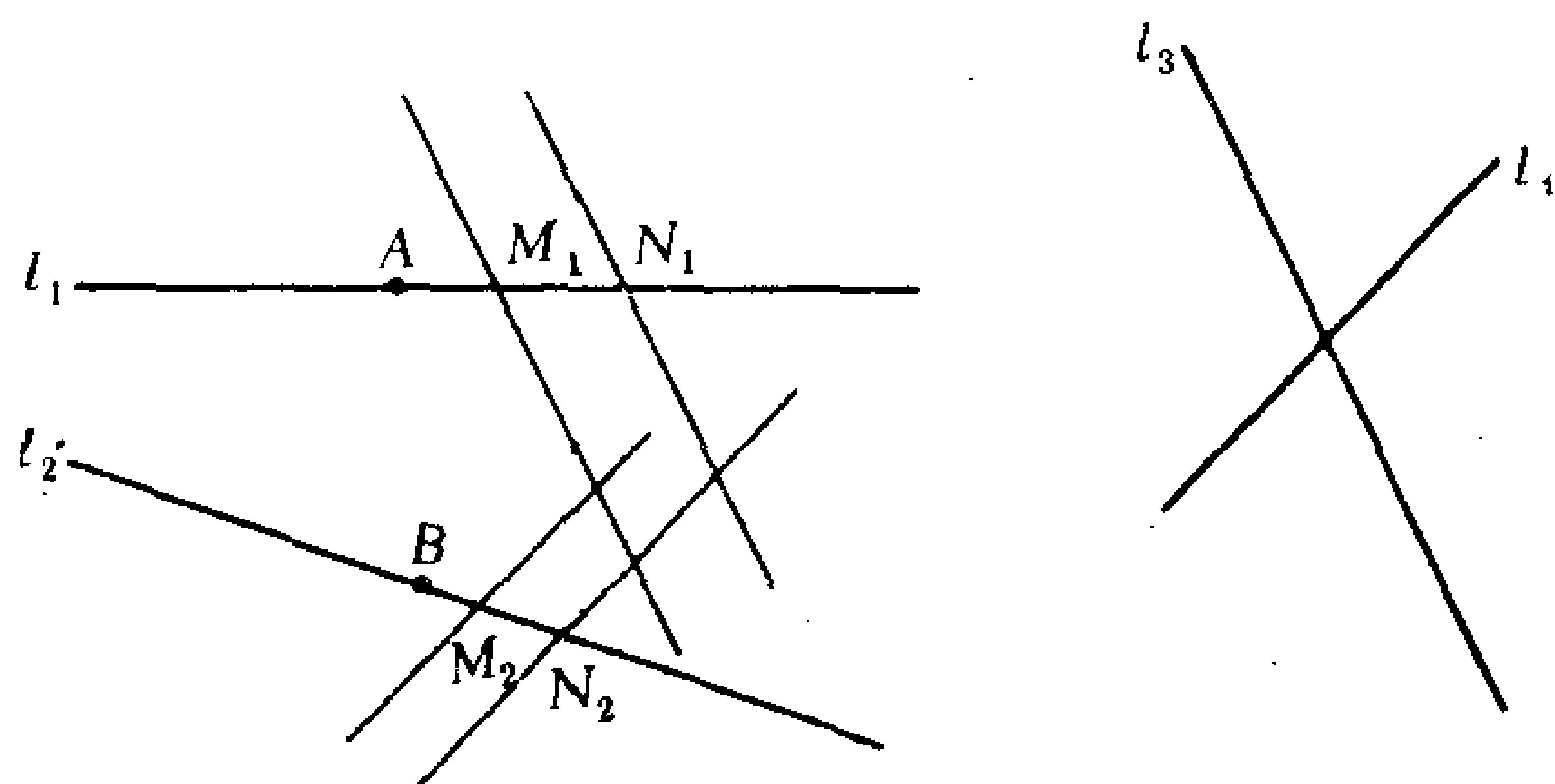


图 11

(b) 多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 按如下的方式变化：它的边保持平行于原来的方向，并且顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 在给定的直线 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ 上移动. 求顶点 A_n 的轨迹.

(c) 在给定的多边形中，求作另一个内接多边形，使它的边平行于一些给定的直线.

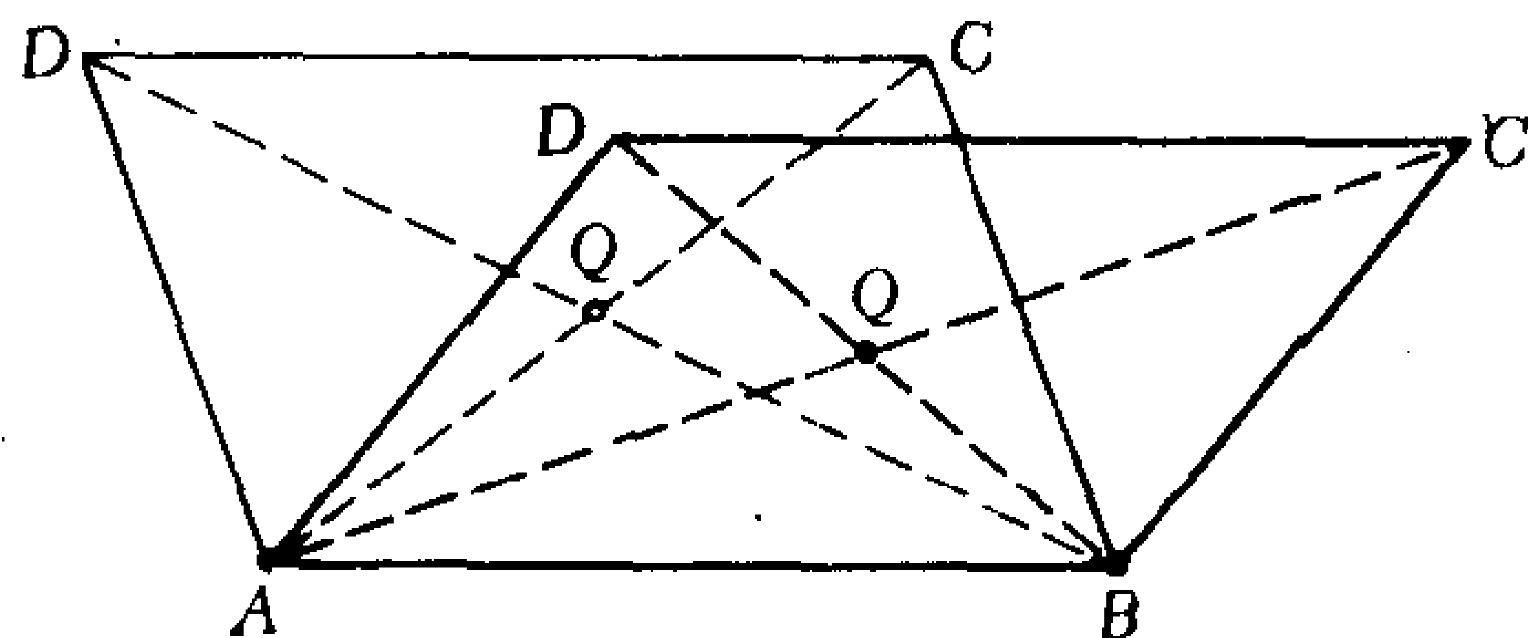


图 12

第三册第一章 § 5 中的问题 189 是问题 10(c)的实质性推广.

11. 设给定一个用绞链连接的平行四边形 $ABCD$. 更确切地说，这四边形的边长是固定的，顶点 A 和 B 也是固定的，但是顶点 C 和 D 可以移动（图 12）. 证明：当 C 和 D 移动时，对角线的交点 Q 沿着某个圆周移动.

12. (a) 设三角形 ABC 的内切圆 S 切 BC 于点 D. 又设与

BC 边，AB 边和 AC 边的延长线相切的傍切圆切 BC 于点 E. 证明 AE 和 S 相交于 D 的对径点 D_1.

(b) 给定△ABC 的内切圆半径 r，BC 边上的高 $AP=h$ 和另外两边之差 $b-c$，求作三角形 ABC.

13. 求作圆 S，使得

(a) S 与两条给定直线 l_1和l_2 相切并且过给定的点 A；

(b) S 过两个给定点 A 和 B 并且与给定的直线 l 相切；

(c) S 与两条给定的直线 l_1和l_2 相切并且与给定的圆 $\bar{S}$ 相切.

见后面的问题 22，第三册第二章 § 2 中问题 232(a)，(b) 和问题 237，§ 3 中问题 247 以及 § 5 中问题 271.

14. (a) 证明三角形 ABC 的中线的交点 M，外接圆中心 O 和高的交点 H 在一直线上[1]，并且 $HM/MO=2/1$〔图 13(a)〕.

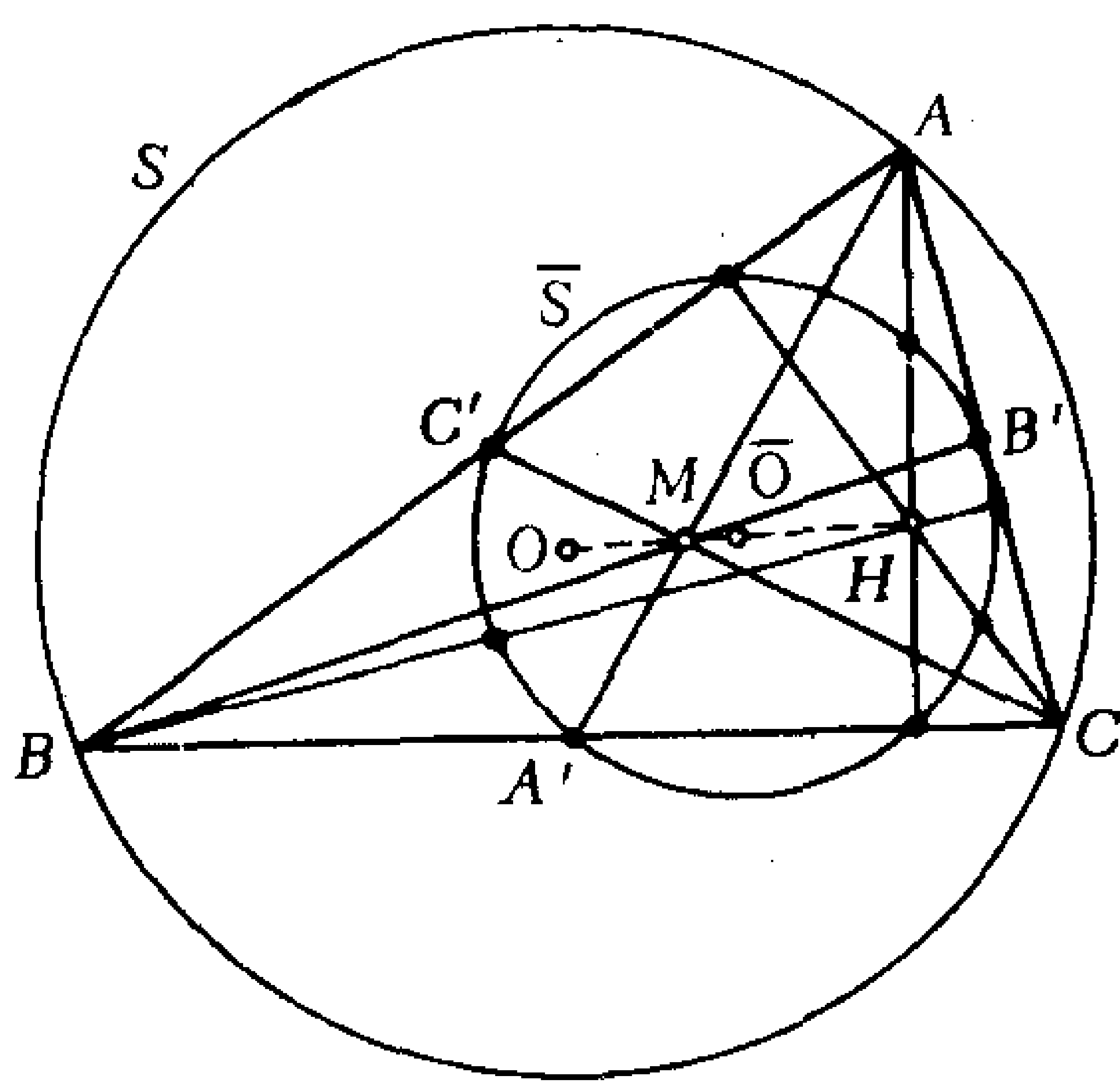


图 13(a)

(b) 证明：过三角形各边的中点并且平行于这些边所对角的平分线的三条直线交于一点.

(c) 证明：联结三角形 ABC 的各顶点和它们的对边与傍

[1] 这条直线称为△ABC 的欧拉线.

切圆的切点的三条直线交于一点 J. 这点与中线的交点 M 和内切圆中心 Z 共线，并且 $JM/MZ=2/1$〔图 13(b)〕.

15. 给定圆 S，求作内接于 S 的三角形 ABC，使得它的顶点 A 和高的交点 H 为给定的点.

16. 给定圆 S. 问：内接于 S 的所有可能的锐角三角形(直角三角形或钝角三角形)的

(a) 中线的交点，

(b) 高的交点，

的轨迹是什么？

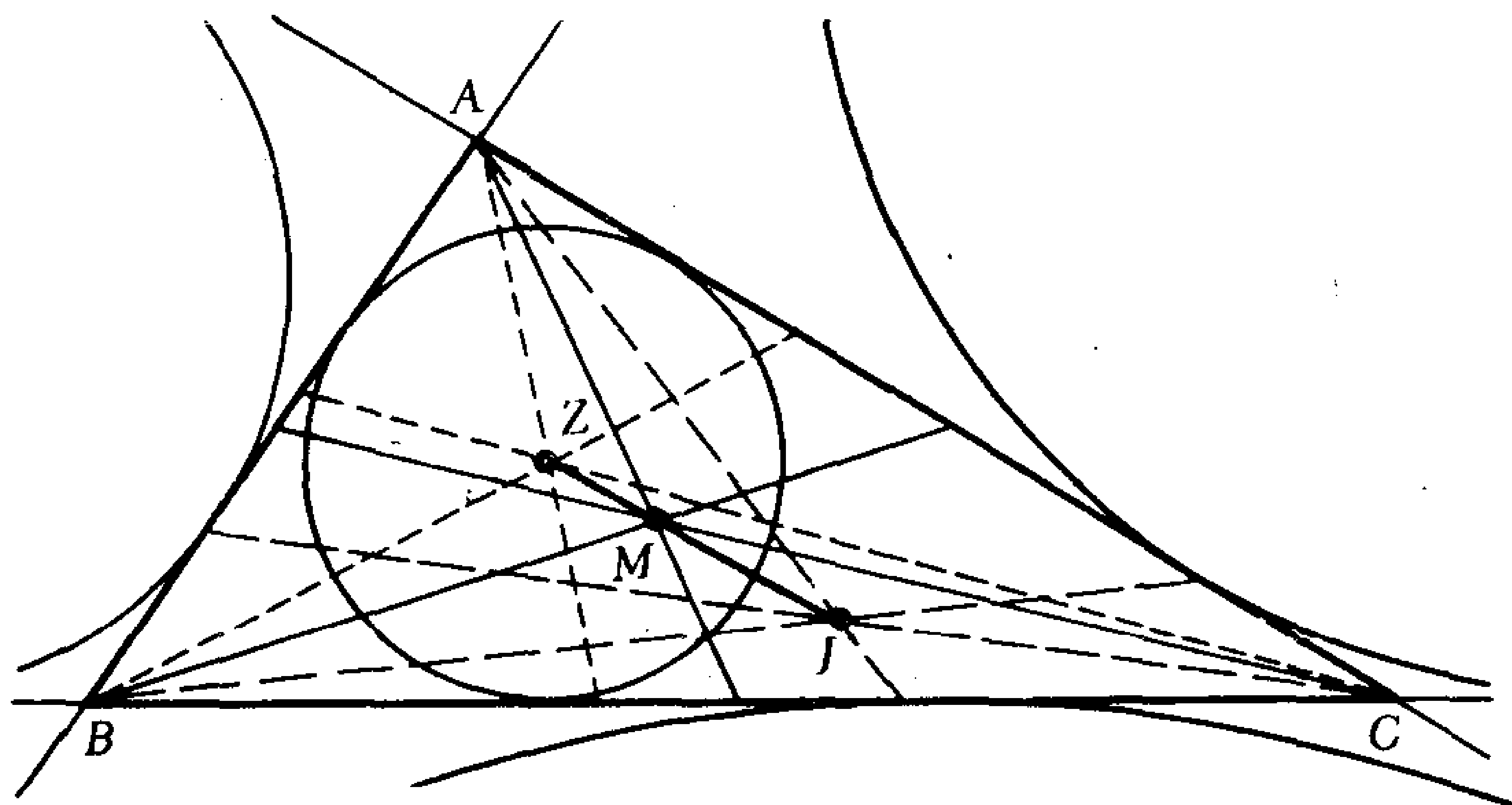


图 13(b)

17. (a) 设 H 是三角形 ABC 的高的交点，M 是中线的交点. 圆 $\bar{S}$ 以 H 为相似中心，1/2 为相似系数，中心相似于 $\triangle ABC$ 的外接圆 S. 证明圆 $\bar{S}$ 也以 M 为相似中心，以 $-1/2$ 为相似系数，中心相似于 S；圆 $\bar{S}$ 经过三角形三边的中点 A'，B'，C'，三条高的垂足以及三条高上的线段 HA，HB，HC 的中

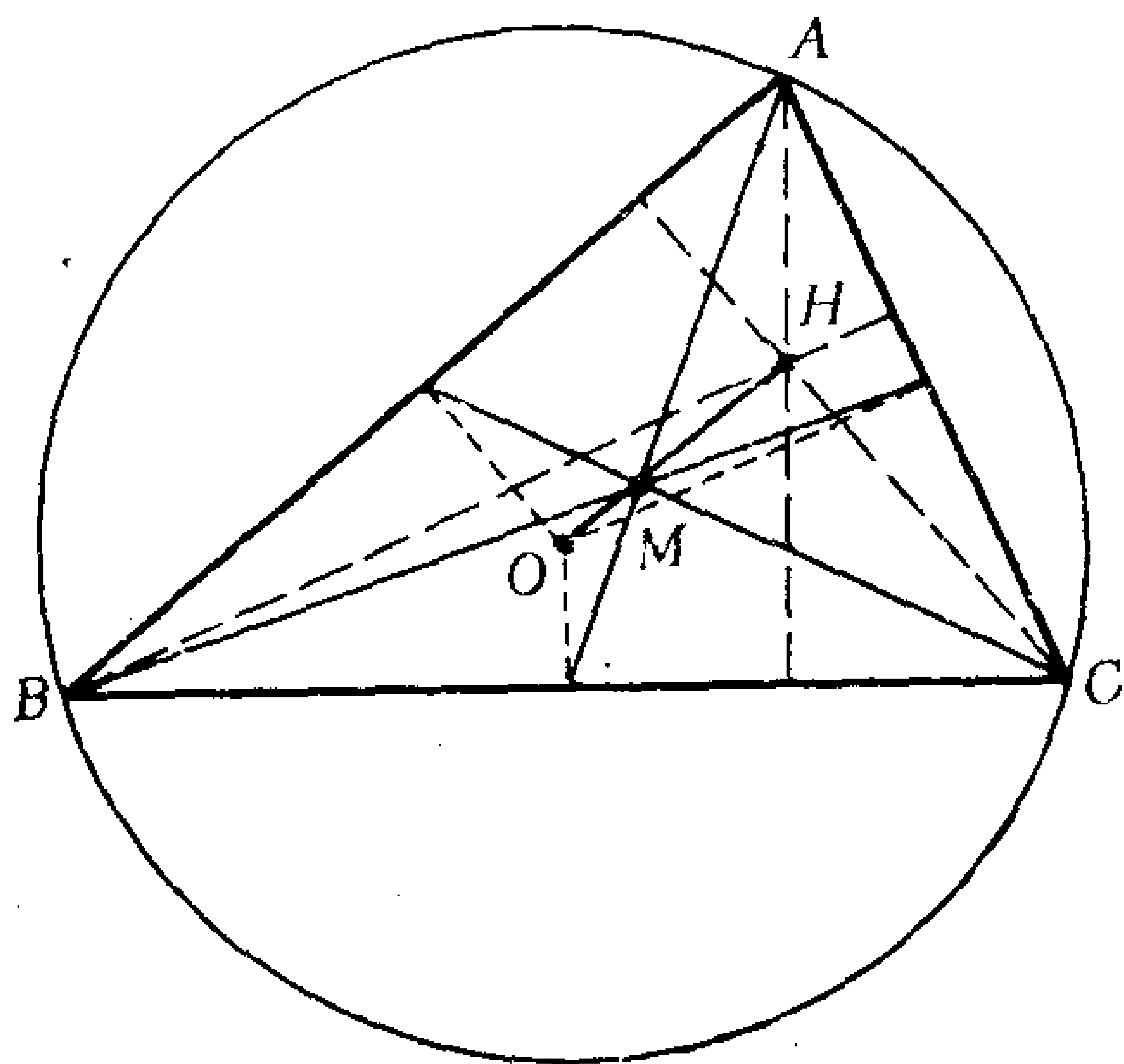


图 14(a)

点〔图 14(a)〕①.

(b) 设 J 是三角形 ABC 的各顶点和它的对边与傍切圆的切点连线的交点〔见问题 14 (c)〕. 命 M 是三角形的中线的交点. 设圆 $\bar{S}$ 以 J 为相似中心，1/2 为相似系数，中心相似于内切圆 S. 证明圆 $\bar{S}$ 以 M 为相似中心，$-1/2$ 为相似系数，且中心相似于 S；圆 $\bar{S}$ 与三角形 ABC 三边中点的连线 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 相切，并且也与线段 JA，JB，JC 的中点 D，E，F 的连线相切〔图 14(b)〕.

18. (a) 多边形的形心. **线段的形心**是指它的中点〔图 15 (a)〕. 三角形的三边的形心构成一个与原三角形中心相似的新三角形，相似系数为 $-1/2$，相似中心在中线的交点，这个点称为**三角形的形心**〔图 15 (b)〕. 以任意给定的四边形的顶点作顶点，可得四个三角形，这些三角形的形心构成一个新四边形，证明这个四边形以 $-1/3$ 为相似系数，中心相似于给定的四边形. 它们的相似中心 N〔见图 15 (c)〕称为**四边形的形心**. 类似地，以任意给定的五边形的顶点作顶点，可得五个四边形，这些四边形的形心构成一个新五边形，这个五边形以 $-1/4$ 为相似系数，中心相似于给定的五边形，它们的相似中

① 这个圆 $\bar{S}$ 称为 $\triangle ABC$ 的九点圆.

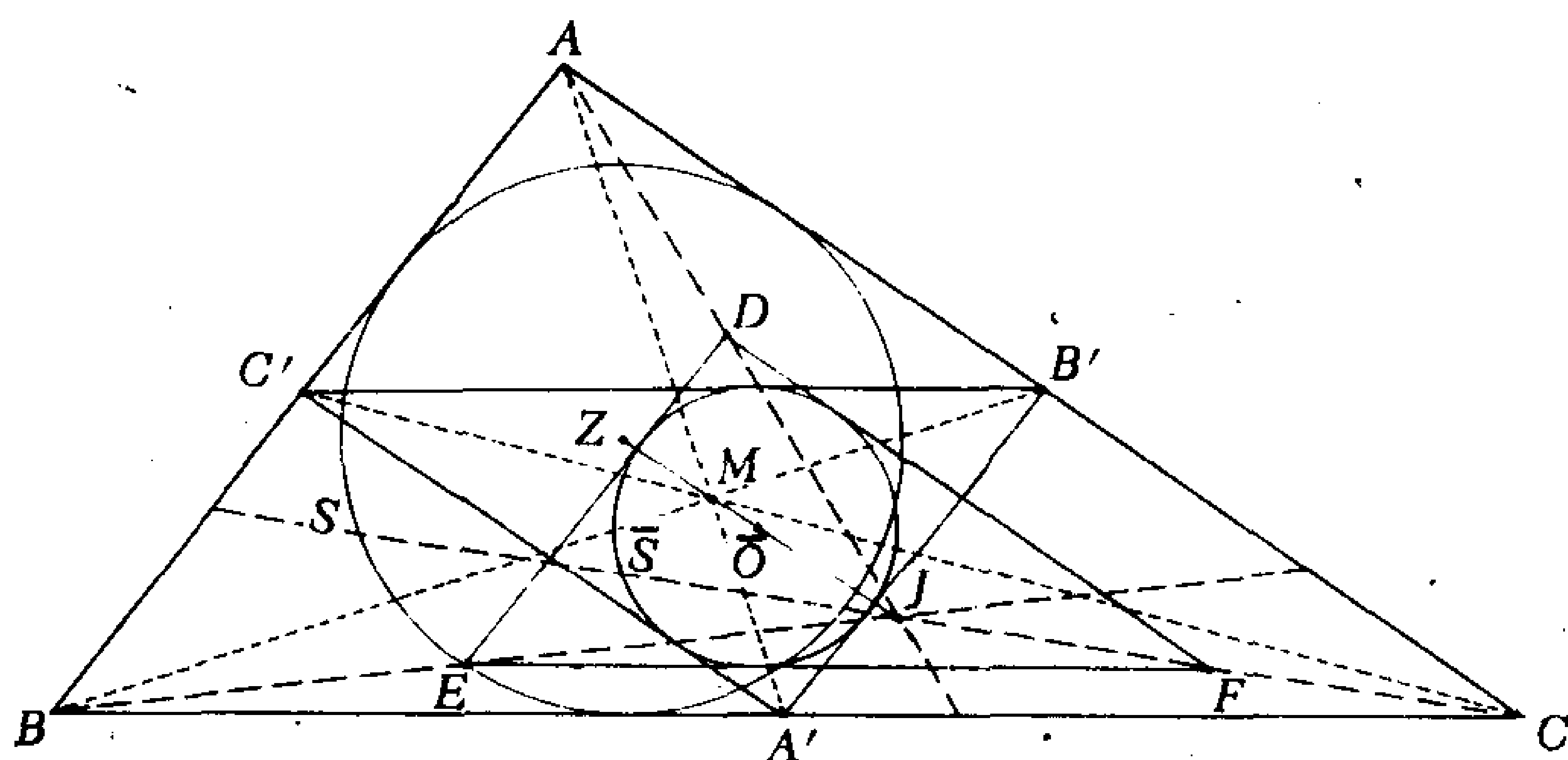


图 14(b)

心称为五边形的形心. 以任意给定的六边形的顶点作顶点，可得六个五边形，这些五边形的形心构成一个新的六边形，这个六边形以 $-1/5$ 为相似系数，中心相似于给定的六边形，它们的相似中心称为六边形的形心，如此等等①.

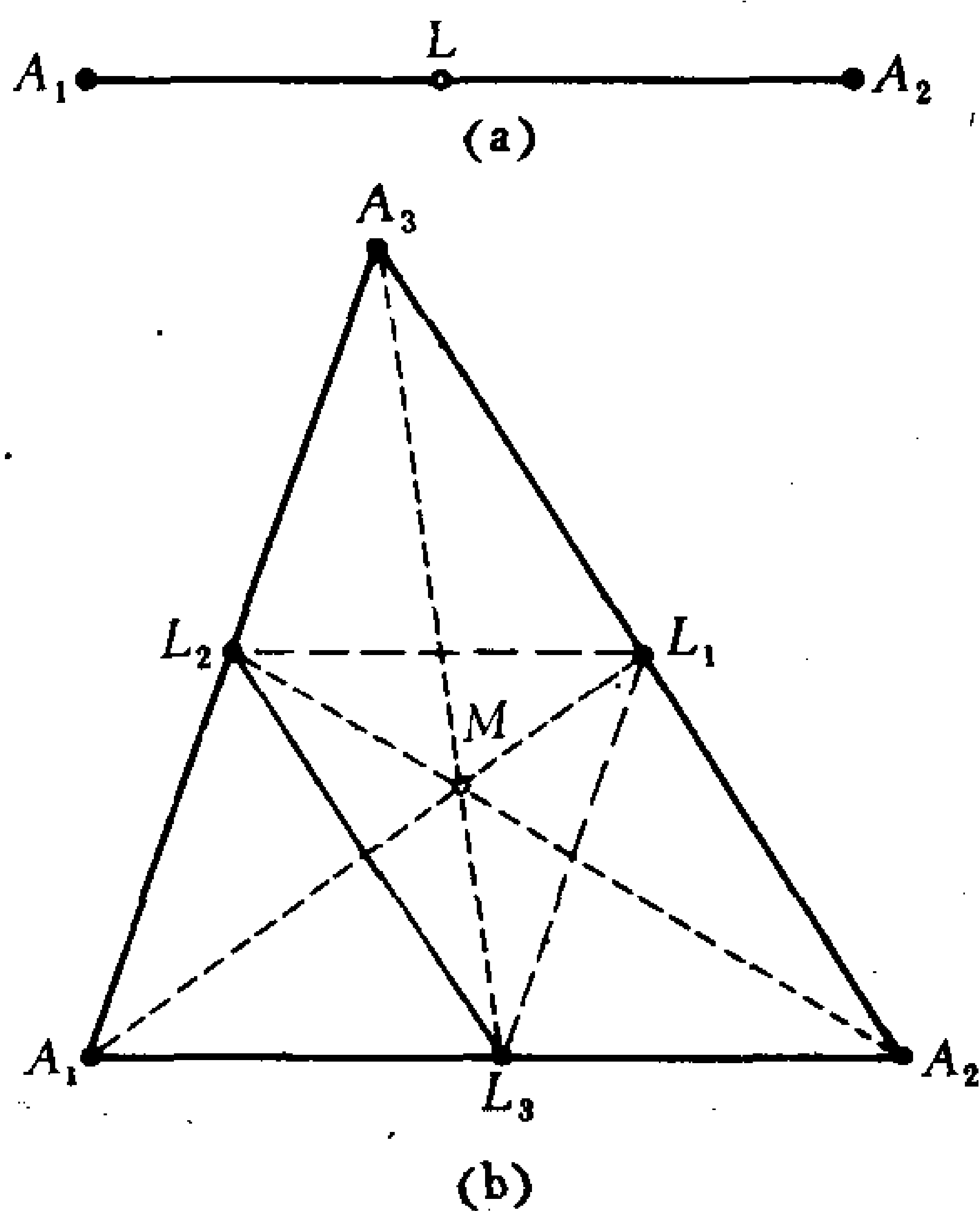
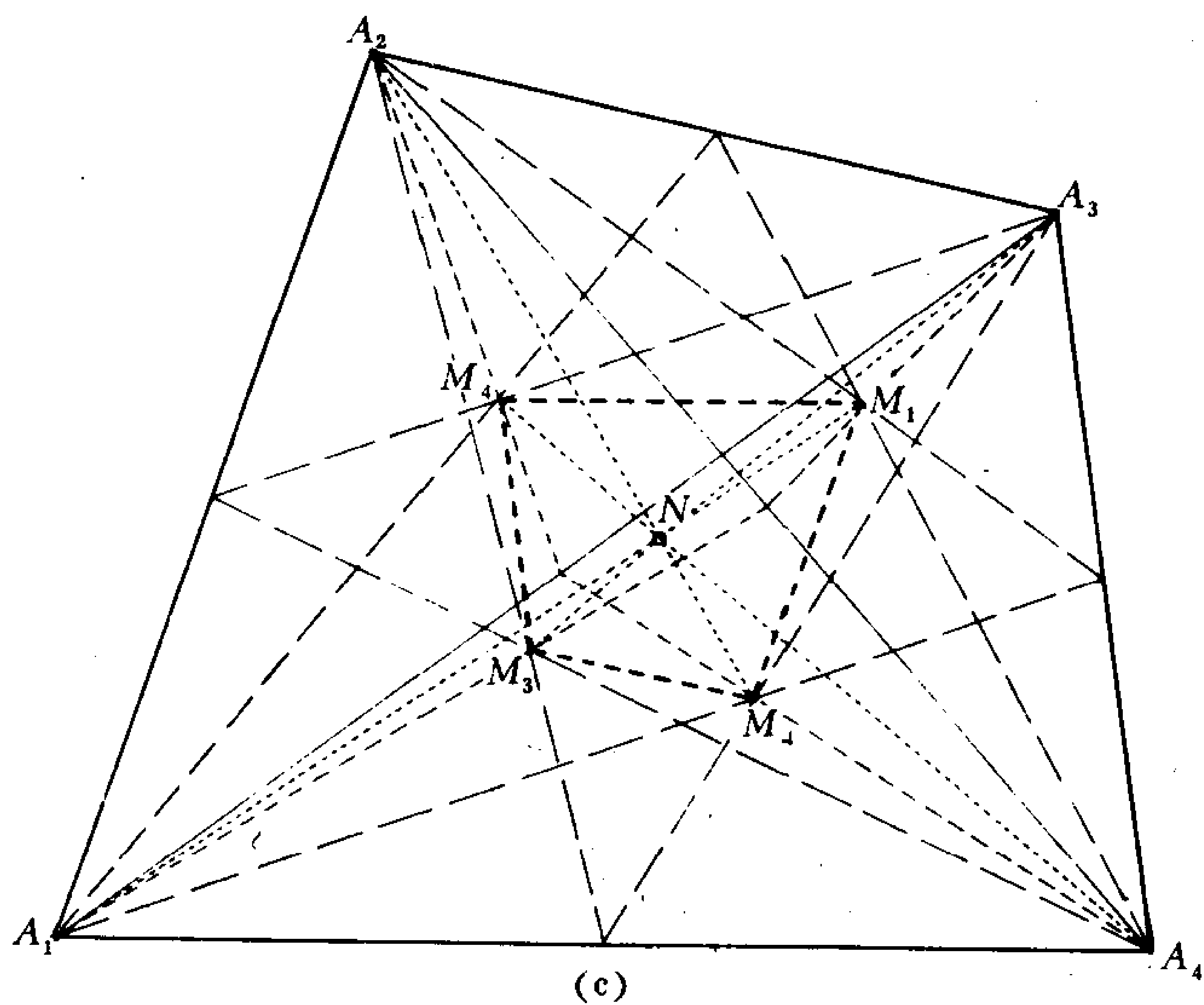
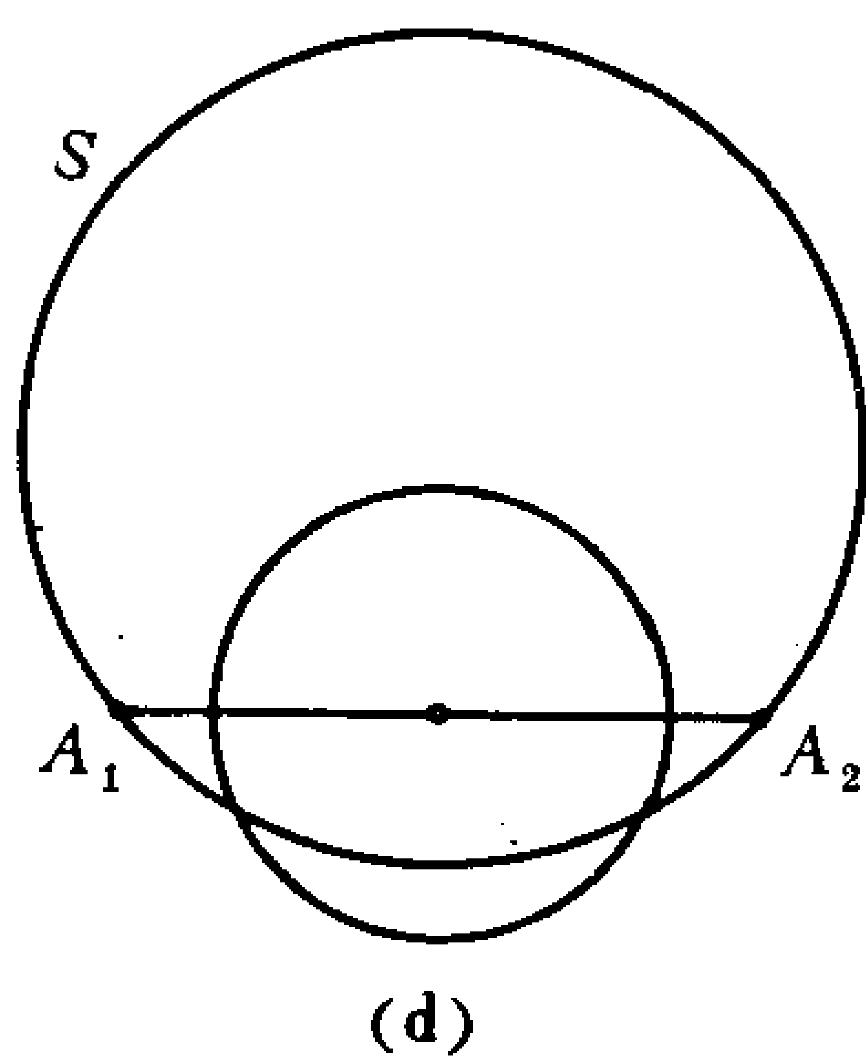


图 15(a) (b)

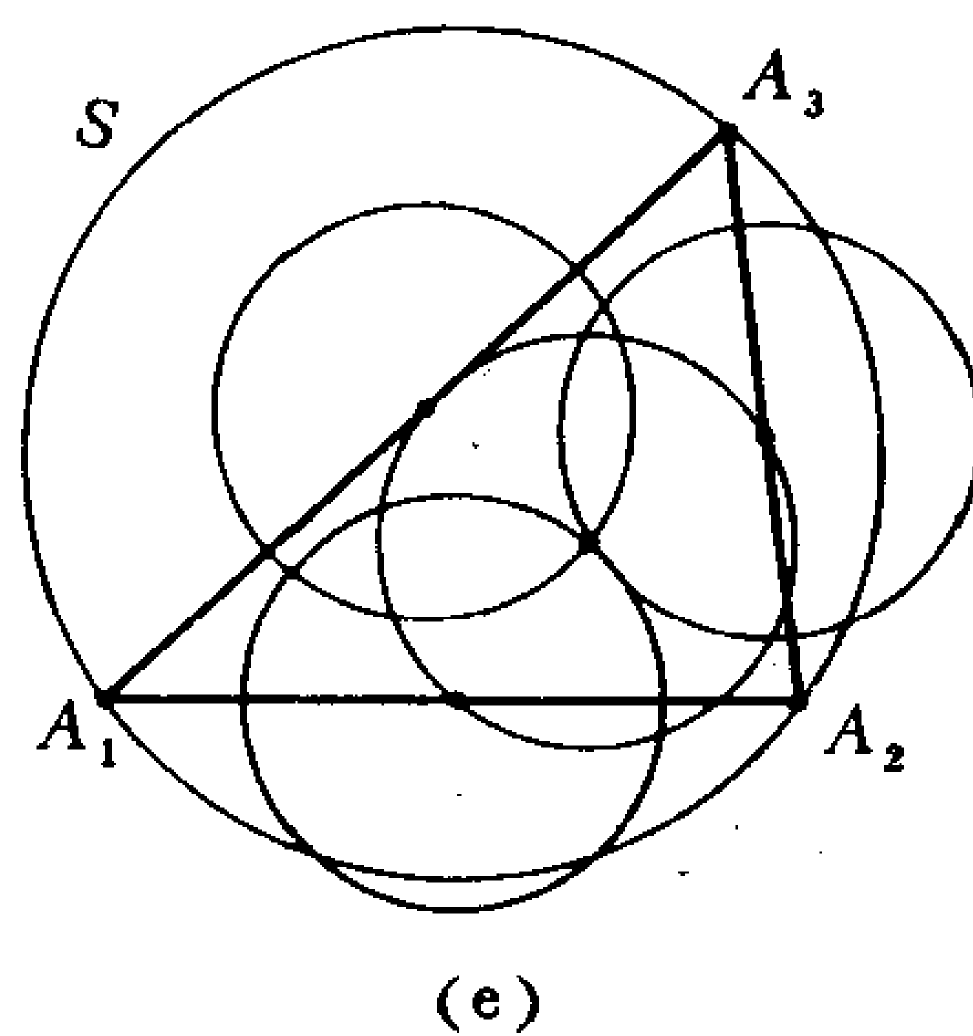
① 不难证明，这里定义的 n 边形的形心与在 n 边形的各顶点处放置相等的质量后的物理重心或重力中心是一致的.



(c)



(d)



(e)

图 15(c)(d)(e)

〔换句话说，联结三角形的各顶点和它的对边的形心所得

的三条直线交于一点（三角形的形心），并且这些直线被交点分为 2∶1；联结四边形的每个顶点和其余三个顶点构成的三角形的形心所得的四条直线交于一点（四边形的形心），并且这些直线被交点分成 3∶1，如此等等〕.

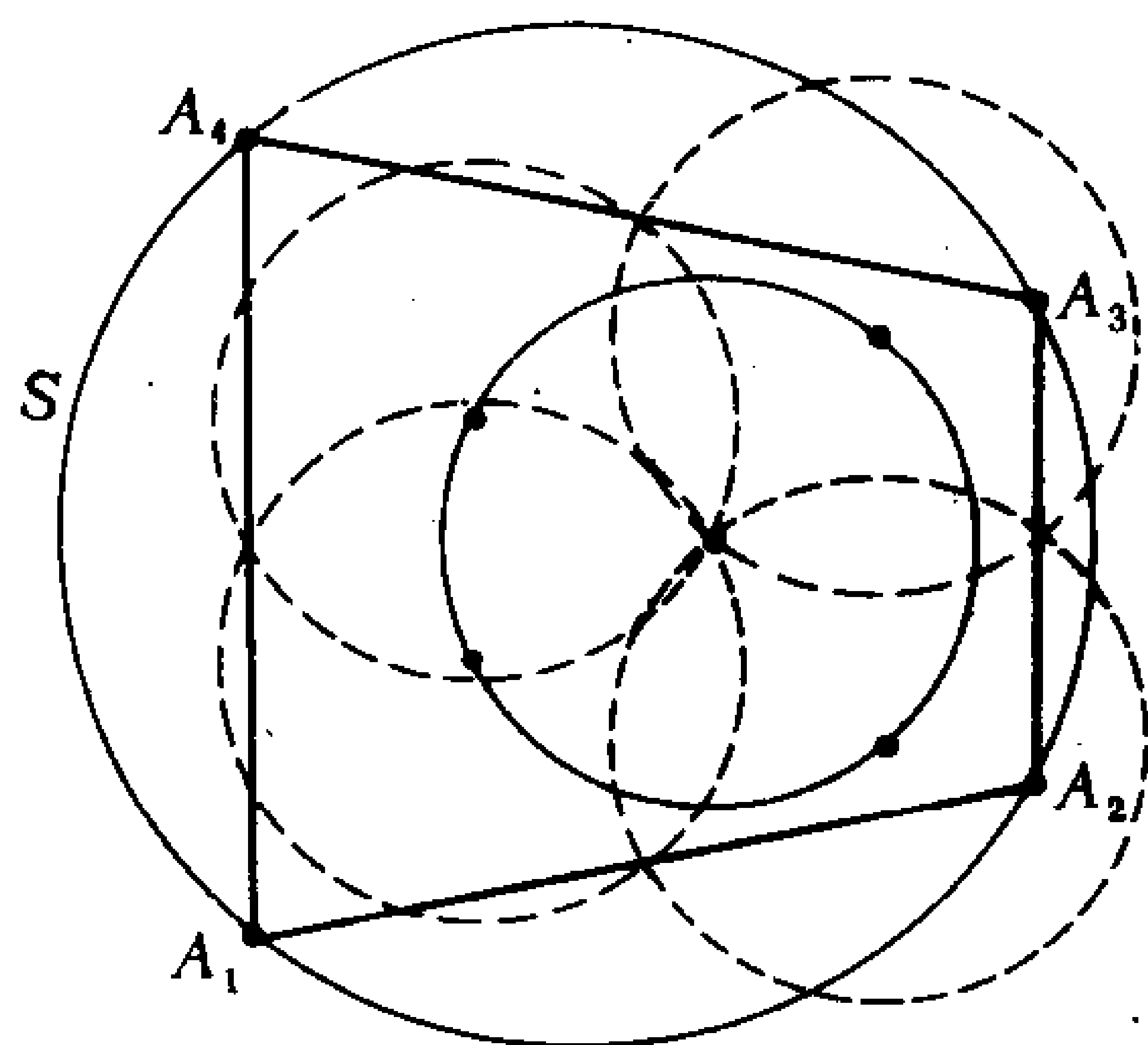


图 15(f)

(b) 圆内接多边形的欧拉圆. 设 S 是半径为 R 的圆，圆 S 的弦的欧拉圆是指中心在弦的中点，半径等于 $R/2$ 的圆〔图 15 (d)〕. 圆 S 的内接三角形三边的欧拉圆的中心落在一个半径为 $R/2$（中心是这三个欧拉圆的交点）的圆上，这个圆称为该三角形的欧拉圆〔参看图 15(e)和图 14(a)〕. 以圆 S 的任意一个内接四边形的顶点作顶点，得到四个三角形，证明这四个三角形的欧拉圆的中心落在一个半径为 $R/2$（中心是这四个欧拉圆的交点）的圆上，这个圆称为该四边形的欧拉圆〔图 15(f)〕. 类似地，以圆 S 的任意一个内接五边形的顶点作顶点得到五个四边形，它们的欧拉圆的中心落在一个半径为 $R/2$（中心是这五个欧拉圆的交点）的圆上，这个圆称为该五边形的欧拉圆. 如此等等.

(c) 证明圆内接 n 边形的形心〔见问题 (a)〕在联结这 n 边形的外接圆中心和欧拉圆中心〔见问题(b)〕的线段上，并且分这线段成 $2∶(n-2)$.

用中心相似来解在平面的有界部分作图的问题是方便的.

通常在解作图题时，总是假定平面是无界的；例如，我们假定每条直线可以在两个方向无限延长. 但是实际上总是在一个有界范围内作图，即作图是在一张纸上或在教室的黑板上进行的. 所以，在作图过程中可能会碰到这样的情况，譬如所要作的两直线的交点落在画面的范围之外，也就是说它对我们来说是不可到达的. 这种情况导致我们考虑这样一类问题，在这些问题中强调作图必须完全在平面的某个有界部分内完成①. 应用中心相似，我们能够得到这样一个值得注意的事实：每个可以在无界平面上实现的作图也可以在平面的任何部分中实现，无论这个部分是多么小(参看下面问题 20).

19. (a) 求作一直线，联结给定点 M 和两条给定直线 l_1, l_2（或一条给定直线 l 与一个圆 S，或两个给定的圆 S_1和S_2）的“不可到达的”交点〔图 16(a)〕.

(b) 过给定点 M 作一直线平行于“不可到达的”直线 l，这里直线 l 上的两个点分别是两对直线 a_1和a_2，b_1和b_2 的交点〔图 16(b)〕.

(c) 过三个不共线的“不可到达”点 A, B, C 作一圆，这里 A, B, C 分别由三对直线 a_1和a_2，b_1 和 b_2，c_1和c_2 的交点确定〔图 16 (c)〕. 当然，在这个问题中，我们仅须作出这个圆落在平面

---

① 我们注意，在几何学中，通常并不坚持在解每个作图题时都要把图形真正画出来：如果解决这个问题的途径已经给出，则这个问题就认为已经解决了. 所以图形的有界性不是解作图题的真正障碍. 因而在平面的有界部分作图的问题必须认为是那样一类问题，在这类问题的叙述中包含了对作图的某种特殊的限制(类似于禁止用直尺或圆规的作图，对于这类作图参看第三册). 在工程设计中，在平面有界部分中的作图问题有实际意义；在大地测量学中，即关于地球上地区的测量和作图的学科中，这类作图也有重要的实际意义，这里允许的作图区域可能是被一条河、一个海域、一座山、一片森林或一块沼泽地所限制.

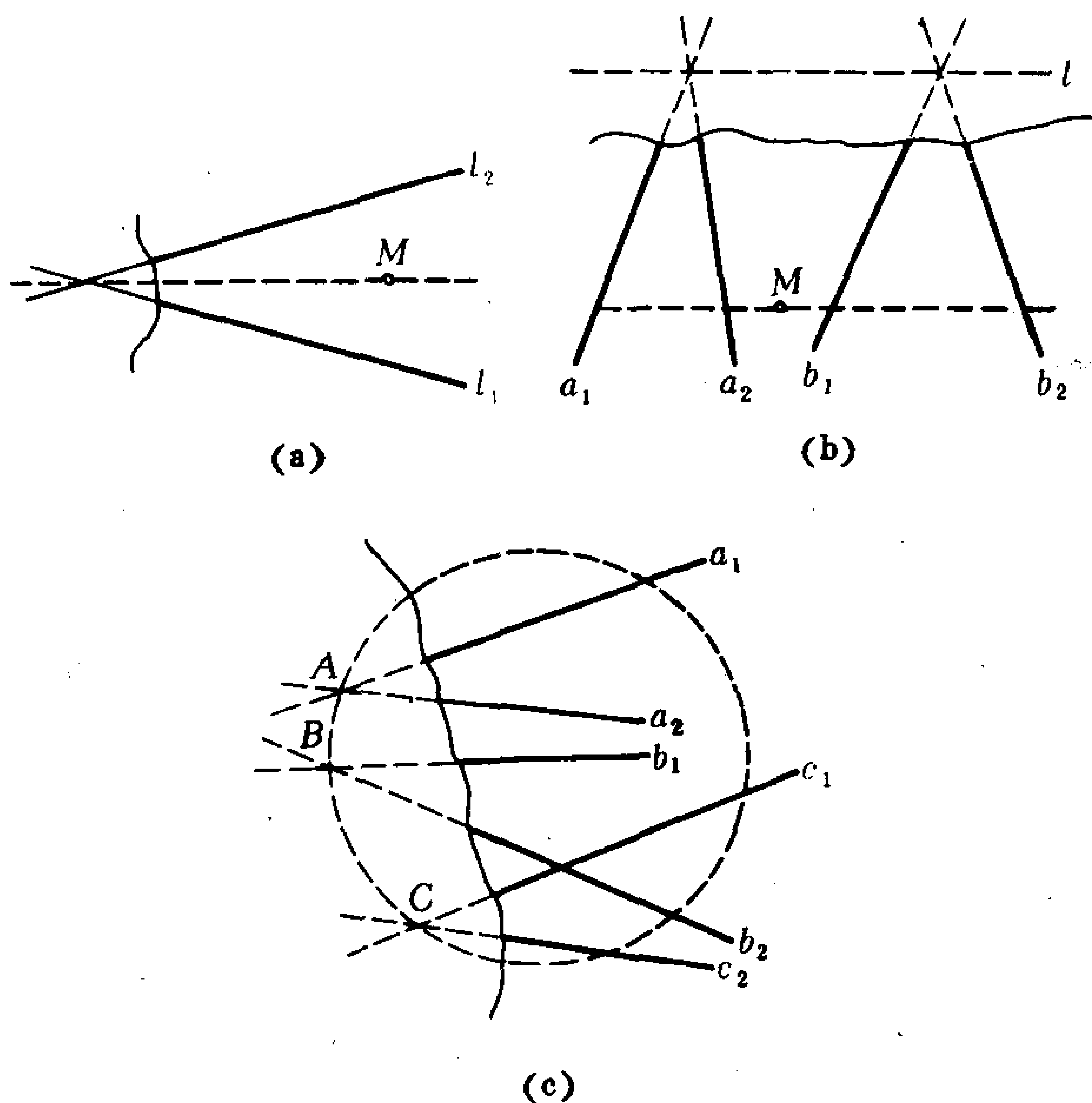


图 16

可到达区域中的部分，或者决定这个圆的中心和半径. 参看第三册第一章 § 2 的问题 119(a)，(b)和问题 120.

20. 在平面的有界部分 $\mathscr{K}$ 中(或者甚至在 $\mathscr{K}$ 之外)，任意给定点的分布和任意给定一些线段的长度，证明，每个在全平面可解的作图题在不超出 $\mathscr{K}$ 的范围的情况下也可解.〔这里的含义是，若一个给定的或者要作的点 A 在 $\mathscr{K}$ 范围之外，则它由 $\mathscr{K}$ 中两条相交于 A 的直线确定；一条不可到达的直线由它的两个点确定；而一个不可到达的圆由它的中心和圆

上一点或由它的中心和半径确定.〕

设 F 和 F' 是两个以 k 为相似系数（正的或负的！）的中心相似图形〔见图 17(a) 和 (b)〕. 这时两个图形中的对应线段总是平行的，并且它们的长度之比为 k，这个结论可以由三角形 OAB 和 $OA'B'$ 相似这一事实得出（因为 $OA'/OA=OB'/OB=\pm k$）. 让我们约定：对于两个平行线段 AB 和 $A'B'$，根据它们的方向（从 A 到 B 和从 A' 到 B'）相同或相反，分别认为它们之比是正的或负的. 这个约定类似于我们以前引进的关于同一直线上两个线段之比的符号的约定. 这样一来，在任何情况下，我们都可以说两个中心相似图形中的对应线段平行，并且有固定的比，这个比就等于相似系数. 反过来，我们可以证明：如果图形 F 的每个点能以这样的方式对应于图形 F' 中的点，使得这两个图形中的对应线段平行并且有固定的比 k（就大小和符号而言！），这里 $k\neq1$，则 F 和 F' 中心相似.

事实上，任取 F 的一点 M，设 M' 是 M 在 F' 中的对应点，A 和 A' 是这两个图形的任意一对与 M 和 M' 不同的对应点，命 O 是直线 MM' 和 AA' 的交点（见图 17）. 因 $MA\parallel M'A'$，三角形 OMA 和 $OM'A'$ 是相似的. 由假设 $M'A'/MA=k$，所以 $OM'/OM=OA'/OA=k$. 由此可见：首先点 O 的确定不依赖于 A，A' 这一对点的选取（它是直线 MM' 上使得 $OM'/OM=k$ 的点）；其次图形 F 和 F' 的任意一对对应点 A 和 A' 都以 O 为相似中心，以 k 为相似系数中心相似，这就是我们所要证明的. 如果对应线段之比是 1，那么我们的论证将不成立，因为这时直线 MM' 和 AA' 不会相交（它们是平行的）. 在这种情形下，图形 F 和 F' 不是中心相似的，但是它们可以彼此经过一个平移得到（见第一册第 12—13 页）.

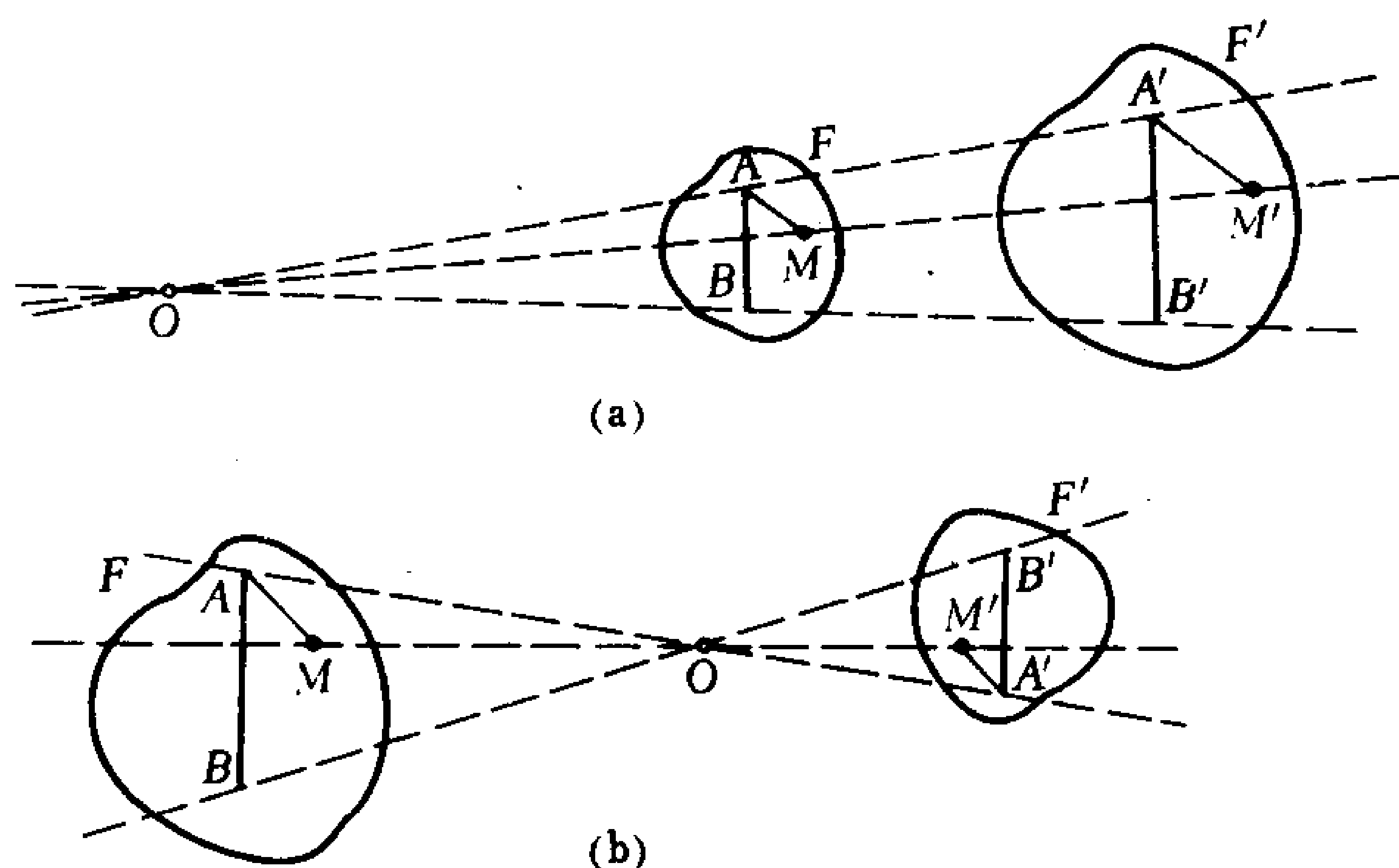


图 17

现在我们来考虑中心相似的加法. 设图形 F_1 中心相似于 F，相似中心为 O_1，相似系数为 k_1；F' 中心相似于 F_1，相似中心为 O_2，相似系数为 k_2（见图 18，为简单起见，我们在图中只画出 k_1和k_2 都是正的情形. 事实上，在下面的论证中，k_1和k_2可以是正的也可以是负的）. 这时 F 和 F_1 中的对应线段平行，并且有固定的比 k_1；F_1 和 F' 中的对应线段也平行，并且有固定的比 k_2. 由此可见，F' 和 F 中的对应线段平行，并且有固定的比 k_1k_2（只要把等式 $A_1B_1/AB=k_1$ 和 $A'B'/A_1B_1=k_2$ 的左右两边分别相乘就得到 $A'B'/AB=k_1k_2$）. 这意味着当 $k_1k_2\neq 1$ 时，F' 中心相似于图形 F，相似系数为 k_1k_2；而当 $k_1k_2=1$ 时，F' 可以由 F 经过一个平移得到. 上面的结论也可以表述如下：两个相似系数分别为 k_1和k_2 的中心相似之和，当 $k_1k_2\neq 1$ 时是一个相似系数为 k_1k_2 的中心相似；而当 $k_1k_2=1$ 时，这

个和是一个平移①.

给定两个中心相似的中心 O_1和O_2 以及相似系数 k_1和k_2，我们现在来说明如何去找作为它们之和的那个中心相似的中心 O（或者当 $k_1k_2=1$ 时，如何去找作为它们之和的那个平移的距离和方向）②. 显然，若 O_1和O_2 重合，则 O 也与它们重合〔图 18 (c)〕. 所以我们假定 O_1和O_2 是不同的. 第一个中心相似保持 O_1 不动，第二个中心相似把 O_1 变到直线 O_2O_1 上使得 $O_2O'_1/O_2O_1=k_2$的点O'_1〔图 18 (a)，(b)〕. 于是两个变换之和把 O_1 变到 O'_1. 由此可知，若 $k_1k_2=1$〔图 18 (b)〕，则两个变换之和是沿直线 $O_1O'_1$ 方向（即直线 O_2O_1 的方向，因为 O'_1 在直线 O_1O_2 上）的平移，平移的距离 $a=O_1O'_1$；因为 $O_2O'_1/O_2O_1=k_2$，所以 a 也可以表成下面的形式

$$a=O_2O'_1-O_2O_1=\frac{O_2O'_1-O_2O_1}{O_2O_1}O_2O_1=(k_2-1)O_2O_1.$$

若 $k_1k_2\neq 1$〔图 18 (a)〕，则所求中心 O 在直线 $O_1O'_1$ 上（亦即在直线 O_1O_2 上），并且使得 $OO'_1/OO_1=k_1k_2$. 还可以找到确定点 O 位置的一个更方便的表达式. 由等式 $O_2O'_1/O_2O_1=k_2$ 和 $OO'_1/OO_1=k_1k_2$ 可得

$$\frac{O_1O'_1}{O_2O_1}=\frac{O_2O'_1-O_2O_1}{O_2O_1}=k_2-1$$

---

① 这个命题还有另一种说法：如果图形 F 和 F' 都中心相似于第三个图形 F_1，则它们或者彼此中心相似或者彼此相差一个平移.

我们建议读者试一试，只从中心相似的定义出发，不用“对应线段平行并且有固定比的两个图形是彼此中心相似的”这一事实，自己去证明中心相似的加法定理.

② 为了使下面的论证不需要分别考虑相似系数 k_1 和 k_2 的符号和大小，我们必须始终考虑有向线段（参看第一册第 14—15 页）.

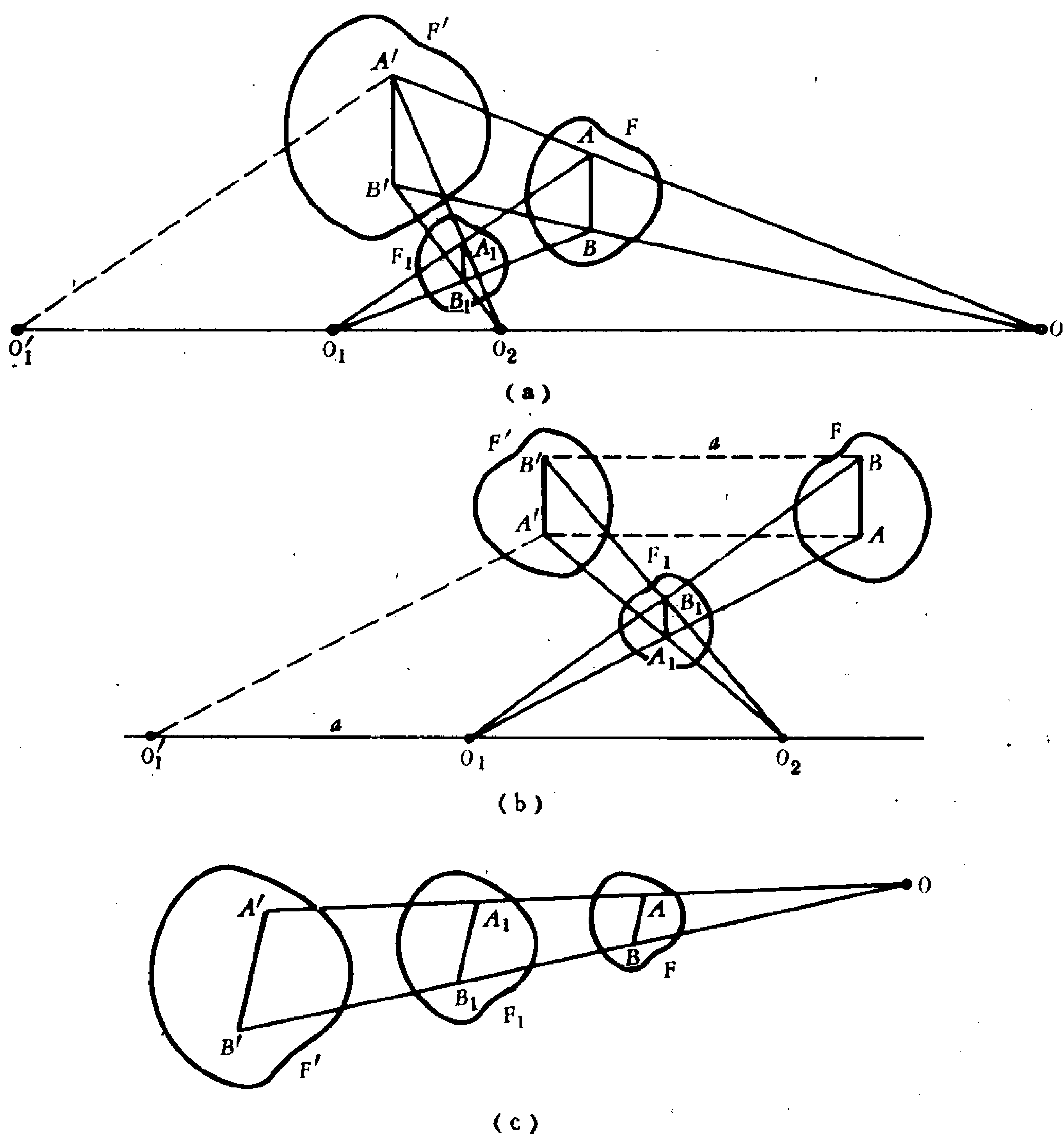


图 18

和

$$\frac{O_1O'_1}{OO_1}=\frac{OO'_1-OO_1}{OO_1}=k_1k_2-1.$$

第一式除以第二式，我们有

$$\frac{OO_1}{O_2O_1}=\frac{k_2-1}{k_1k_2-1},$$

最后得到

$$OO_1=\frac{k_2-1}{k_1k_2-1}O_2O_1.$$

这样一来，我们证明了下面的重要定理①：

三相似中心定理 设图形 F_1 中心相似于图形 F，相似中心为 O_1，F_1 又中心相似于图形 F'，相似中心为 O_2. 如果 O_1 不与 O_2 重合，则直线 O_1O_2 或者经过图形 F 和 F' 的相似中心 O〔图 18 (a)〕，或者平行于把 F 变到 F' 的平移的方向〔图 18 (b)〕. 如果 O_1与O_2 重合，则 O_1 也是 F 和 F' 的相似中心〔图 18 (c)〕.

如果 O_1和O_2 不同，则直线 O_1O_2 称为图形 F，F_1，F' 的**相似轴**；如果 O_1和O_2 重合，则称这个点为图形 F，F_1，F' 的**相似中心**.

三相似中心定理常常不很严格地叙述为：三个两两中心相似的图形的三个相似中心在一条直线上②.

作为例子我们考虑三个圆 S_1,S_2,S_3 的情形. 在一般情况下，即当它们之中任何两个都不全等时，每一对圆有两个相似中心，即外相似中心和内相似中心，所以总共有六个相似中心，它们落在四条相似轴上（图 19）. 如果这些圆中有两个全等，则这两个全等的圆就没有外相似中心，于是有五个相似中心，它们落在四条相似轴上. 如果这三个圆都全等，则有三个相似中心和三条相似轴. 还有，如果这三个圆的中心不在一条

---

① 这个定理的一个完全不同的证明概述在第三册第二章的最后一段.

② 三个相似中心重合的情形包含在这个叙述中，这个叙述对三个相似中心存在的所有情形都成立. 正文中所指出的不精确之处在于这里我们已经排除考虑三个图形 F_1,F_2,F_3 中有两个全等的情形. 参看第三册第一章 § 2.

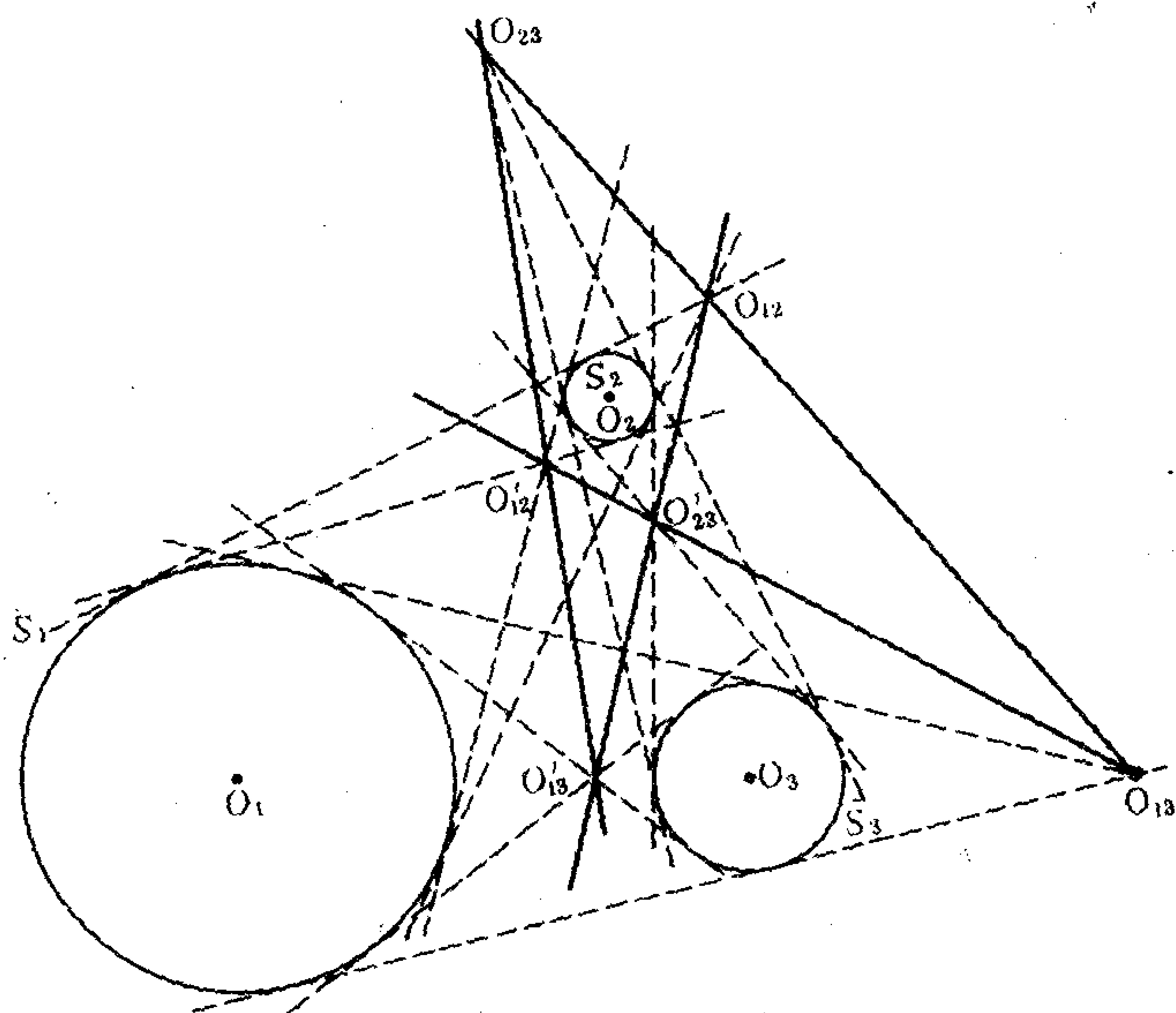


图 19

直线上，则所有的相似轴互不相同；如果这些中心共线，则相似轴全都重合；还可能碰巧有三个相似中心重合，这时三个圆的四条相似轴中有一条变成了一个相似中心.①

三相似中心定理有一个漂亮的立体几何式的证明. 我们用字母 π 表示三个图形 F, F_1, F' 所在的平面. 把图形 F, F_1, F' 扩展成空间图形 $\bar{F}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}'$，它们是以同样的相似中心 O_1, O_2, O 两两中心相似的（图 20）②. 如果 F' 不是中心相似于

---

① 我们建议读者自己去画出图形，说明所有可能的情形.

② 空间中的中心相似的定义和性质类似于平面上的中心相似的定义和性质.

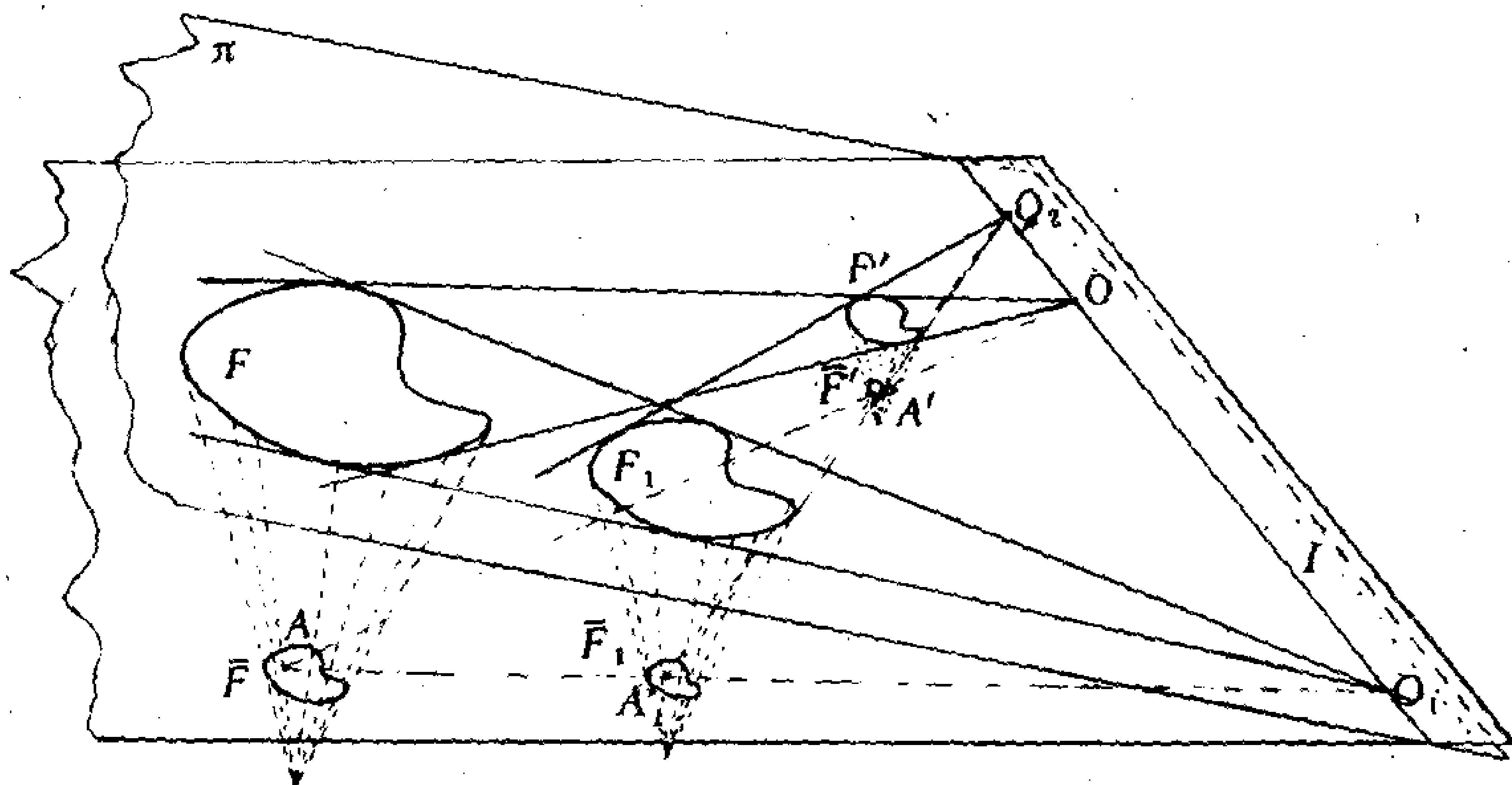


图 20

F，而是由 F 经过平移得到，则 $\bar{F}'$ 也是由 $\bar{F}$ 经过同一平移得到. 设 A 是 $\bar{F}$ 的任意一个不在平面 π 上的点，命 A_1 和 A' 是 A 在 $\bar{F}_1$和$\bar{F}'$ 中的对应点. 于是直线 A_1A过O_1，A_1A' 过O_2，AA' 过 O（或平行于把 F 变到 F' 的平移的方向）. 因此，若 O_1和O_2重合，则直线 A_1A和$A'A_1$ 也重合. 所以直线 AA' 也必定与 AA_1和A_1A' 重合，这意味着 AA' 和平面 π 的交点 O 与 O_1和O_2 重合. 如果 $O_1 \neq O_2$，则过 A, A_1, A' 的平面与 π 交于一直线 l，这条直线过所有的三个相似中心 O_1, O_2, O，或过 O_1和O_2 并且平行于把图形 F 变到 F' 的平移的方向.

21. 设圆 S 与圆 S_1和S_2 都相切. 证明联结切点的直线过 S_1和S_2 的一个相似中心（如果 S 与 S_1, S_2 都外切或都内切，则这个相似中心是外相似中心，否则是内相似中心）.

这个问题还将出现在第三册第二章 §1 中（参看问题 212）.

22. 用三相似中心定理导出问题 13(c)的一个新解法.

23. (a) 设圆 S_1和S_2外切于 M_1（即它们在 M_1 点相切，并且任何一个都不在另一个之内）；圆 S_2和S_3 外切于 M_2；圆S_3和S_1 外切于 M_3〔图 21 (a)〕. 命 A_1是S_1 的任意一点，A_2 是直线 A_1M_1与S_2 的第二个交点；A_3是A_2M_2与S_3 的第二个交点；A_4是A_3M_3与S_1 的第二个交点. 证明 A_1与A_4是S_1 的对径点①.

把本题的结果推广到任意奇数个相切圆的情形.

(b)设圆 S_1和S_2 外切于 M_1；圆S_2和S_3 外切于 M_2；圆S_3和S_4 外切于 M_3；最后 S_4与S_1 外切于 M_4〔图21(b)〕. 命 A_1 是 S_1 上任意一点，A_2 是直线 A_1M_1与S_2 的第二个交点；A_3是A_2M_2与S_3 的第二个交点；A_4是A_3M_3与S_4 的第二个交点；A_5是A_4M_4与S_1 的第二个交点. 证明 A_1与A_5 重合②.

把本题的结果推广到任意偶数个相切圆的情形.

(c) 在前面(a)，(b) 中，如果我们不坚持要求每两个圆都彼此外切，结果如何?

24. 设圆 R 和 S 外切于点 M，t 是这两圆的公切线，它分别与 R 和 S 在 N 和 P 相切（图 22）. 命 A 是 R 上任意一点，B 是直线 AM 与 S 的第二个交点. 过 N 引直线平行于 PB，设这条直线与 R 相交于 C. 证明 A 和 C 是圆 R 的对径点.

25. 设 ABC 是给定的三角形，k 是平行于 BC 的直线，分别与边 AC 和 AB 交于点 K 和 L；m 是平行于 CA 的直线，分别与边 BA 和 BC 交于点 M 和 N；p 是平行于 AB 的直线，分别与

---

① 例如，如果 $A_2=M_2$，则直线 A_2M_2必须用S_2在M_2的切线代替，所以也有 $A_3=M_2$.

② 见注①.

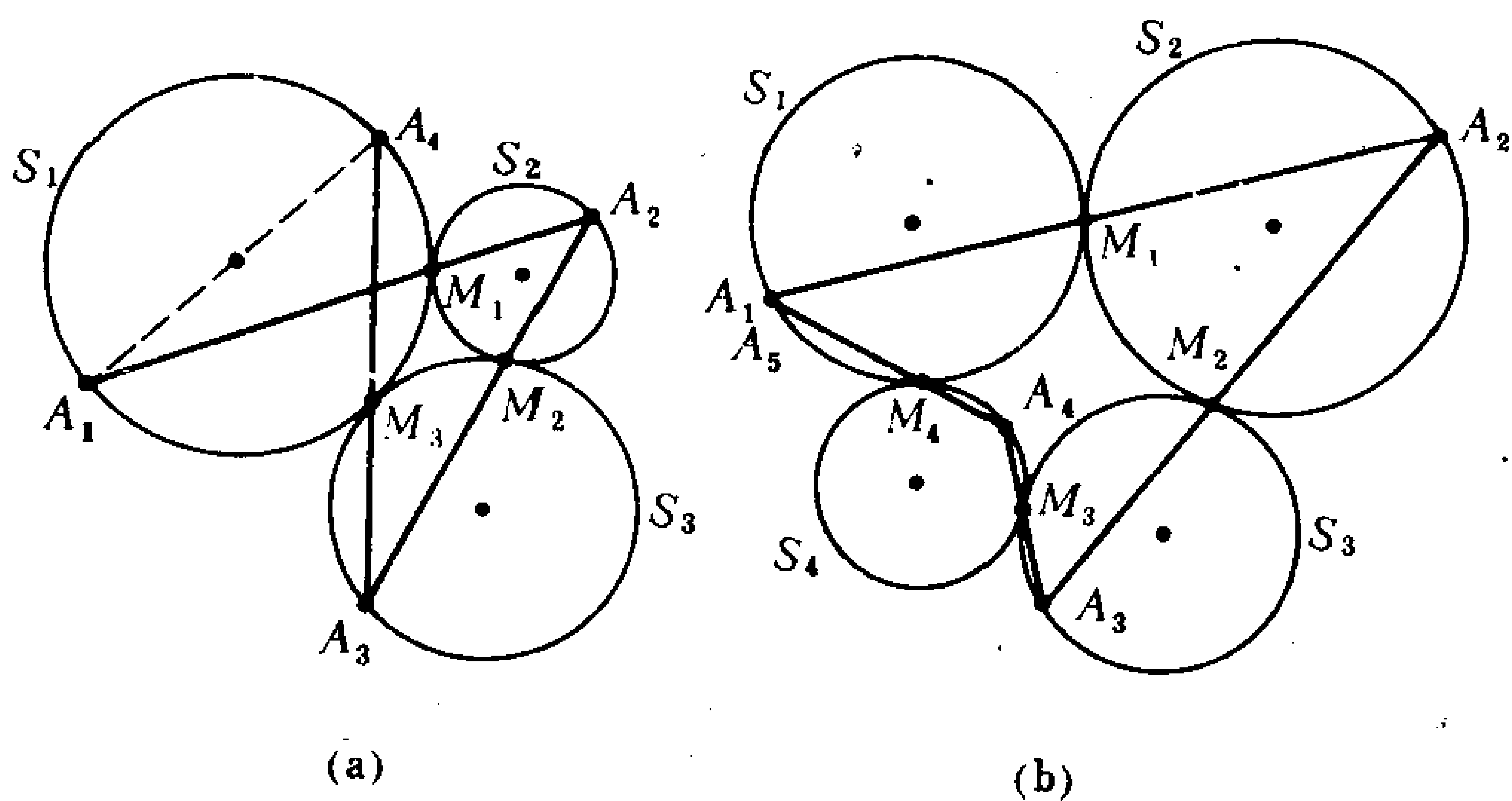


图 21

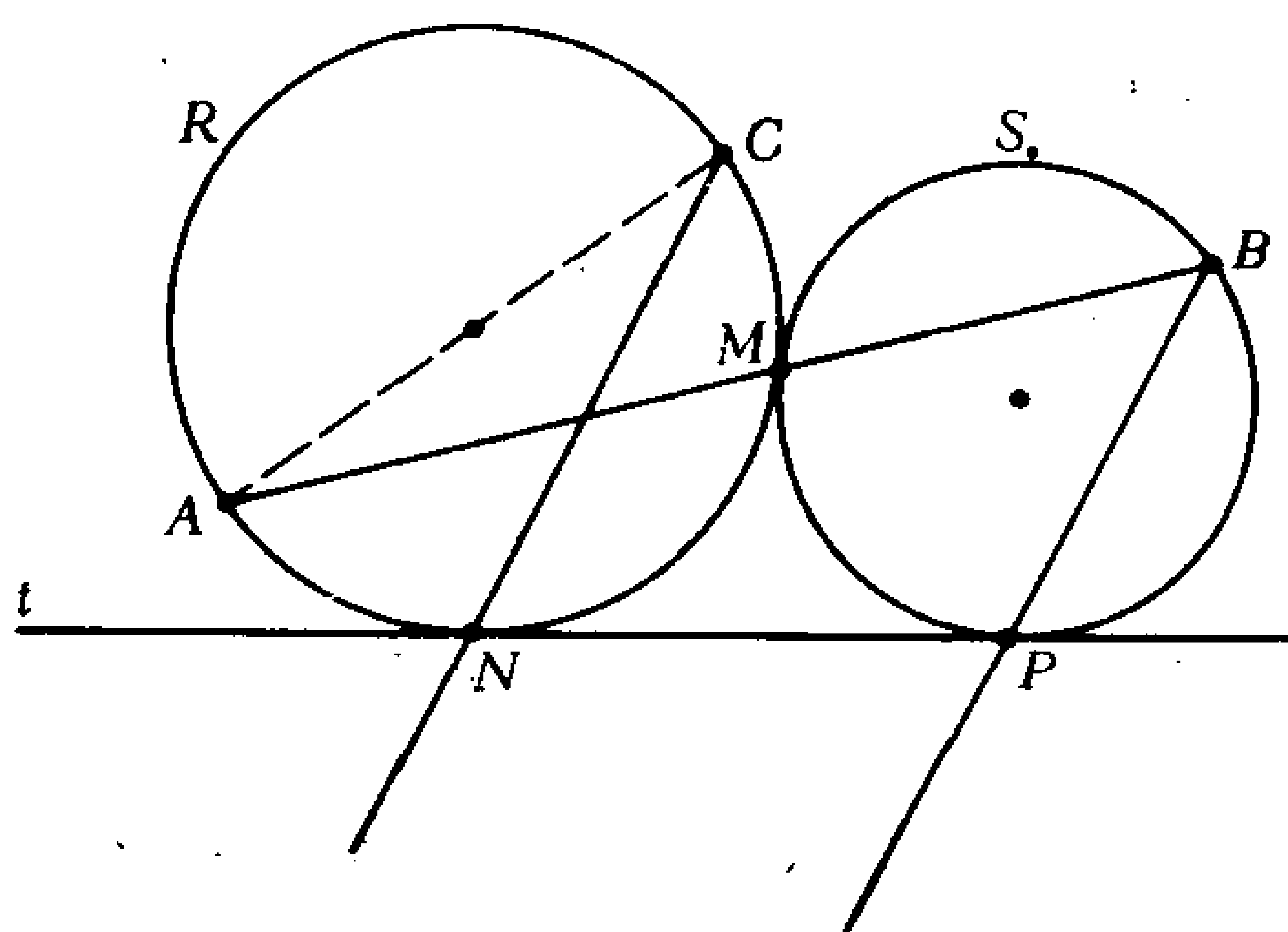


图 22

边 CB 和 CA 交于点 P 和 Q. 证明：如果 AB 和 KN，BC 和 MQ，CA 和 PL 的交点都存在，则它们共线.

26. (a) 设 P 是平面上任意一点，D,E,F 分别是给定的三角形 ABC 的边 AB,BC,CA 的中点，K,L,M 分别是 P 关于 D, E, F 的对称点. 证明线段 CK, AL, BM 交于同一点 Q，并且 Q 是这些线段的中点.

(b) 设 (a) 中的点 P 沿着圆 S 移动，问点 Q 描出怎样的路径?

27. 设 M,N,P 是三角形 ABC 的边 AB,BC,CA（或它们的延长线）上的三个点. 证明

(a) 三点 M,N,P 共线，当且仅当

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

（梅涅劳定理）;

(b) 三条直线 CM,AN,BP 共点或平行，当且仅当

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

（塞瓦定理）.

梅涅劳定理和塞瓦定理还将出现在第三册第一章 § 2 中〔见问题 34(a), (b)〕. 那里给了这些重要定理的很多应用①.

28. (a) 用问题 18(a) 和 14(a) 中的断言导出第一册第二章 § 1 中问题 34(a) 的一个新解法.

---

① 在 27(a) 中我们必须证明两个定理：1) 若点 M,N,P 在一条直线上，则

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

（条件的必要性）；2) 若

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1.$$

则点 M,N,P 在一条直线上（条件的充分性）. 对问题 27(b) 也作类似的说明. 关于线段比的符号的概念见第 10 页.

(b) 设 A_1,A_2,A_3,A_4 是圆 S 上的四个点；O_1,O_2,O_3,O_4 分别是三角形 $A_2A_3A_4,A_1A_3A_4,A_1A_2A_4,A_1A_2A_3$ 的欧拉圆〔见问题17(a)〕的中心. 证明四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 以 $-1/2$ 为相似系数，中心相似于四边形 $A_1A_2A_3A_4$（图 23）.

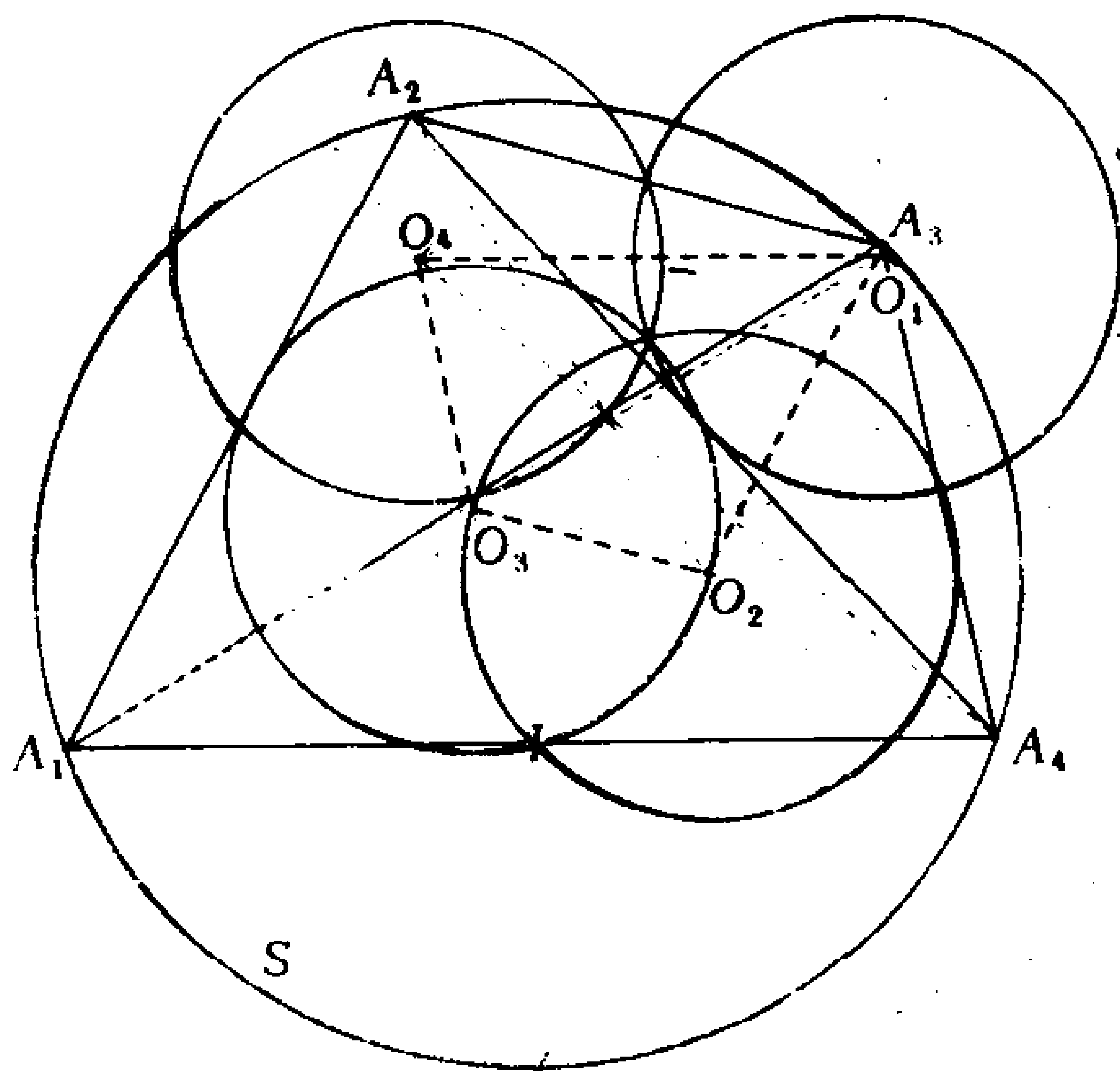


图 23

〔换句话说，如果点 A_1,A_2,A_3,A_4 在一个圆上，则联结它们中的每一点到其余三点张成的三角形的欧拉圆的中心所得的四条线段交于一点，并且这些线段被这点分成 2∶1〕.

29. 设 A_1,A_2,A_3,A_4 是圆 S 上的点；H_4,H_3,H_2,H_1 分别是三角形 $A_1A_2A_3,A_1A_2A_4,A_1A_3A_4,A_2A_3A_4$ 的高的交点. 从 $A_1,A_2,A_3,A_4,H_1,H_2,H_3,H_4$ 中选取由下标互不相同的三个点组成的点组，并考虑以这些点组作为顶点的所有的三角形（例如，三角形 $A_1A_2A_4$ 和 $A_1H_2H_4$ 是允许的，而三角形 $A_1A_3H_3$ 是不允许的，因为 A_3 和 H_3 有相同的下标）. 这种三角形共有 $(8\cdot6\cdot4)/6=32$ 个. 对每个这样的三角形可以作一个欧拉

圆〔见问题 17(a)〕. 证明

(a) 这 32 个圆中仅有 8 个是不同的；

(b) 这 8 个圆都全等，并且相交于同一个点；

(c) 可以把这 8 个圆分成两组，使得任意一组中的四个圆的圆心以 1/2 为相似系数，分别中心相似于四个点 A_1, A_2, A_3, A_4，并且以 $-1/2$ 为相似系数，分别中心相似于四个点 H_1, H_2, H_3, H_4.

2. 螺旋相似与膨胀反射 · 正向相似与反向相似的图形

设 F_1 是与图形 F 中心相似的图形，具有相似中心 O 和正的相似系数 k. 将 F_1 绕点 O 转 α 角到达位置 F'（图 24）. 把 F 变成 F' 的这个变换称为*螺旋相似*. 于是，一个螺旋相似由两个量：*相似系数* k *和转角* α 来刻划. 点 O 称为这个螺旋相似的*中心*.

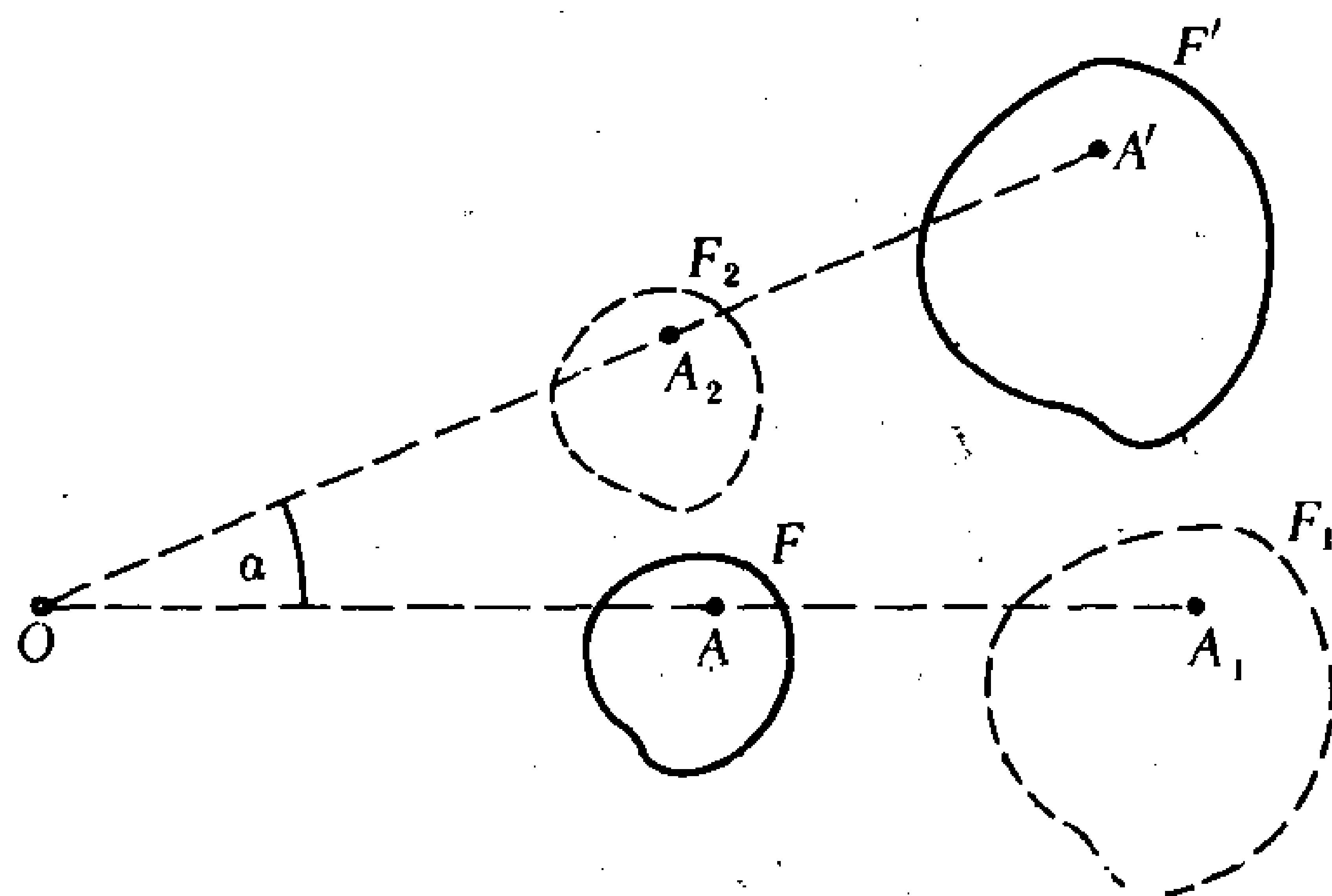


图 24

螺旋相似也能以如下的方式实现：先将 F 绕 O 转过 α 角使之到达位置 F_2，然后作相似中心为 O，相似系数为 k 的中

心相似把 F_2 变到 F'. 换句话说，中心为 O，转角为 α，相似系数为 k 的螺旋相似是一个以 O 为中心，k 为相似系数的中心相似和一个绕点 O 的转角为 α 的旋转之和，这个和与两个变换施行的次序无关①. 由此可见，若 F' 由 F 经过以 O 为中心，以 α 为转角，以 k 为相似系数的螺旋相似得到，则反过来，F 也可以由 F' 经过一个螺旋相似（有相同的中心 O，转角为 $-\alpha$，相似系数为 $1/k$）得到. 因而我们可以说这两个图形是一对螺旋相似的图形.

螺旋相似把每条直线 l 变成一条新的直线 l'〔图 25(a)〕. 为了作出 l'，我们首先必须作出以 O 为相似中心，以 k 为相似系数，中心相似于 l 的直线 l_1，然后再把 l_1 绕点 O 转 α 角使之到达位置 l'. 直线 l 与 l' 构成 α 角（见第一册第 24 页）. 每个圆 S 经过螺旋相似变成新的圆 S'〔图 25(b)〕. S' 的中心 A' 是 S 的中心 A 在这个螺旋相似下的像，S' 的半径 r' 等于 kr，这里 r 是 S 的半径，k 是相似系数.

绕一点的旋转是螺旋相似的特殊情形（相似系数 $k=1$）. 这使得我们可以把第一册中某些用旋转来解的问题加以推广. 但是在解这些更一般的问题时，我们必须用螺旋相似代替旋转. 例如，对于第一册第一章 § 2 中问题 18 的条件，可用“与任意一个给定的三角形相似的三角形”来代替“等边三角形”；对于问题 20 的条件，可以要求“圆 S_1 和 S_2 在所求直线 l_1 和 l_2 上截得的弦的长度有任意给定的比”. 问题 18 和 20 的这些推广的解法与原来问题的解法类似，我们把它们留给读者自己

---

① 由此可见，螺旋相似是这一册引言中所定义的那种相似变换，这是因为中心相似是相似变换，而旋转则是保距变换.

去完成.

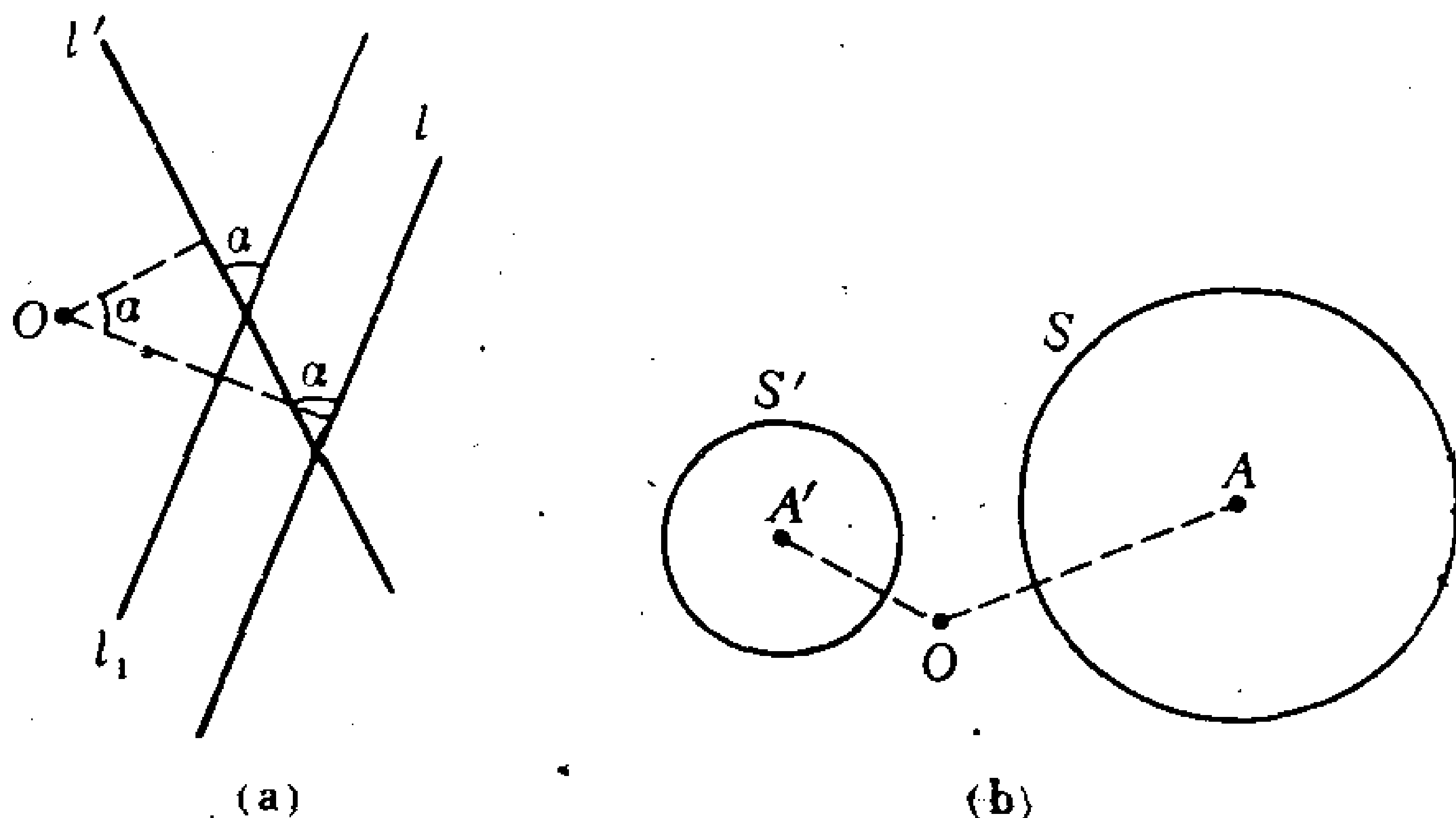


图 25

螺旋相似的另一种特殊情形是中心相似（相似系数为 k 的中心相似是这样一种螺旋相似，当 $k>0$ 时，它的转角 $\alpha=0°$；当 $k<0$ 时，转角 $\alpha=180°$）. 与之相应我们也可以推广本章第一节中的某些问题. 但是在解这些新问题时，我们必须用螺旋相似代替中心相似. 例如，在问题 1 的条件中，对于点 B 和 C，我们可以要求“线段 AB 和 AC 不是在一条直线 l 上，而是分别在过点 A 并构成一定角 α 的两条直线 l 和 m 上”（见问题 34. 它是 § 1 中问题 13(c)的推广）.

如果螺旋相似不是恒等变换（恒等变换可以看作是转角为 0°，相似系数为 1 的螺旋相似），则相似中心是它的仅有的不动点. 如果螺旋相似不是中心相似（即这个螺旋相似的转角不是 0°或 180°），则它没有不动直线.

30. (a) 在给定的△ABC 中，作内接三角形 PXY（点 P 给定在 AB 边上），使它与给定的△LMN 相似.

(b) 在给定的平行四边形 $ABCD$ 中，作内接平行四边形，

使它与给定的平行四边形 $KLMN$ 相似.

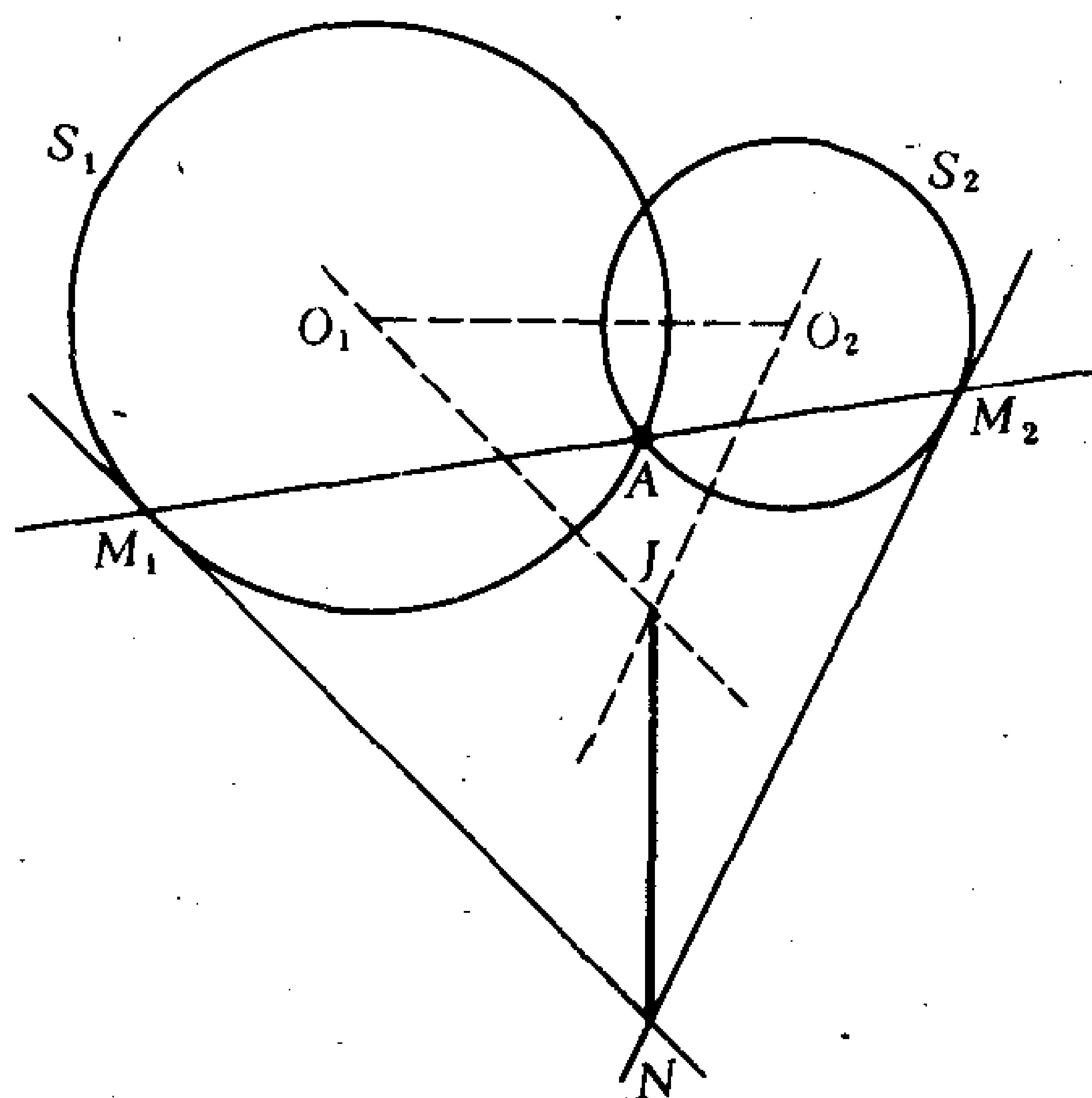


图 26

31. 给定两个相交的圆 S_1 和 S_2，A 是其中一个交点. 过 A 引直线分别与 S_1 和 S_2 交于 M_1 和 M_2，设 N 是这两个圆在 M_1 和 M_2 处切线的交点. 过圆心 O_1 和 O_2 引直线分别平行于 M_1N 和 M_2N，设它们交于点 J(图 26). 证明：直线 JN 总过某个定点，并且线段 JN 总有同样的长度(与直线 M_1AM_2 的选取无关).

32. (a) 作一个可以内接于圆的四边形 $ABCD$，使得它的边有给定的长度 $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$.

(b) 给定四边形 $ABCD$ 的对角 B 与 D 之和以及边长 $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$，求作这个四边形.

问题(a)是问题(b)的特殊情形.

33. 设 R 与 S 是两个相交的圆，M 是它们的一个交点；设 l 是任意一条过 M 的直线，分别交 R 和 S 于点 A 和 B①. 当 l 变动时，求下列各种点的轨迹：

---

① 例如，若 l 与 S 相切，则点 $B=M$(参看第 33 页上的注).

(a)把线段 AB 分成给定的比 $AQ/QB=m/n$ 的点 Q；

(b) 以线段 AB 为一边的等边$\triangle ABC$ 的顶点 C；

(c) 以一固定点 O 为起点，与线段 AB 平行、相等且有相同方向的线段 OP 的端点 P①.

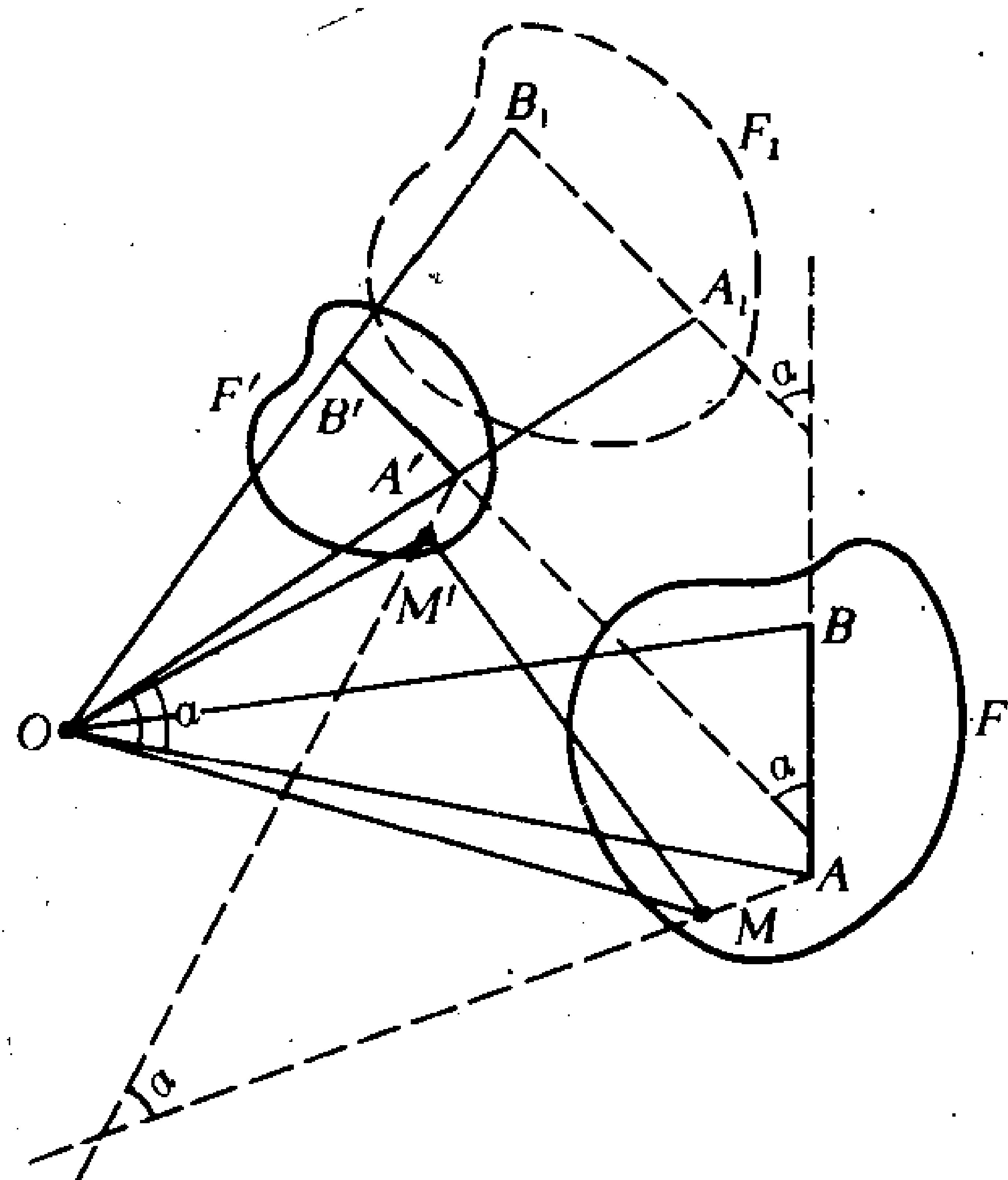


图 27

34. 作圆 S，使它与两条给定的直线 l_1和l_2 相切，并且与给定圆 $\bar{S}$ 交成定角 α.（两圆的交角是指在交点处它们的切线的夹角. 相切的圆的交角是 0；不相交的圆不构成角.）

设图形 F' 是由图形 F 经过转角为 α，相似系数为 k 的螺旋相似得到的（图 27）. 命 AB 和 $A'B'$ 是这两个图形中任意两条对应线段. 这时有 $A'B'/AB=k$（因为在图 27 中，F_1 是由 F 经过转角为 α 的旋转得到的，F' 是由 F_1 经过系数为 k 的中心相似得到的，我们有 $A_1B_1=AB$，$A'B'/A_1B_1=k$），并且线

① 换句话说，在问题 33 (c) 中，我们要找以固定点 O 为起点且与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的端点 P 的轨迹.

段 $A'B'$ 与 AB 的夹角等于 α（因为 AB 与 A_1B_1 的夹角等于 α，而且 $A'B' \parallel A_1B_1$）. 所以图形 F' 与 F 中的对应线段有定比 k，并且构成定角 α. 现在我们证明，反过来，若 F 的每个点以这样的方式对应于 F' 的点，使得两个图形中的对应线段有定比 k，并且构成定角 α（当按一确定方向把图形 F 的线段转 α 角时，这些线段变得与图形 F' 中的对应线段平行），则 F 与 F' 彼此是螺旋相似的. 事实上，设 M 和 M' 是 F 和 F' 中任意两个对应点（图 27）. 在线段 MM' 上作 $\triangle MM'O$, 使得 $OM'/OM=k$，并且 $\angle MOM'=\alpha$①（若 $\alpha>180°$，则作三角形使得 $\angle MOM'=360°-\alpha$）.

以 O 为中心，α 为转角，k 为系数的螺旋相似把 M 变到 M'. 我们证明它把 F 的每个点 A 变到 A 在 F' 中的对应点 A'. 考虑 $\triangle OMA$ 和 $OM'A'$. 在这两个三角形中，$OM'/OM=M'A'/MA$（因为由 $\triangle OM'M$ 的作法有 $OM'/OM=k$，而由假设有 $M'A'/MA=k$），并且 $\angle OMA=\angle OM'A'$（因为由作法 OM 和 OM' 的夹角等于 α，而由假设 MA 与 $M'A'$ 的夹角也等于 α. 见第一册第 26—27 页），因此它们是相似的. 由此得到 $OA'/OA=k$，并且 $\angle AOA'=\angle MOM'=\alpha$（因为 $\angle AOM=\angle A'OM'$）. 而这就意味着我们的螺旋相似把 A 变成 A'.

现在容易回答这样的问题：两个螺旋相似的和是什么？

---

① 首先必须作一个顶角为 α，相邻两边之比等于 k 的辅助三角形 T，由于 T 相似于 $\triangle MOM'$，所以 T 确定了 $\triangle MOM'$ 的底边 MM' 的对角. 我们把 $\triangle MM'O$ 作在线段 MM' 的这样一边，使得把直线 OM 变到 OM' 所要作的（转角为 α）旋转与把 F 的线段变成平行于它在 F' 中的对应线段所作的（转角为 α）旋转，两者的旋转方向一致.

点 O 也可通过求两圆弧的交点找出来，其中一个圆弧上的每个点对线段 MM' 的视角为 α，另一个圆弧是到 M 和 M' 的距离之比等于 k 的点的轨迹.

设图形 F_1 是由图形 F 经过中心为 O_1，相似系数为 k_1，转角为 $\alpha_1$①的螺旋相似而得到，而图形 F' 是由 F_1 经过中心为 O_2，相似系数为 k_2，转角为 α_2 的螺旋相似得到. 设 AB，A_1B_1，$A'B'$ 是这三个图形中的对应线段（图 28）. 于是，$A_1B_1/AB=k_1$，并且线段 AB 和 A_1B_1 构成角 α_1；$A'B'/A_1B_1=k_2$，并且线段 A_1B_1 和 $A'B'$ 构成角 α_2. 所以有

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}\cdot\frac{A'B'}{A_1B_1}=k_1k_2,$$

并且线段 AB 和 $A'B'$ 构成角 $\alpha_1+\alpha_2$（见第一册第 28 页中的注）. 这样一来，图形 F 和 F' 中的对应线段有定比 k_1k_2，且构成定角 $\alpha_1+\alpha_2$.

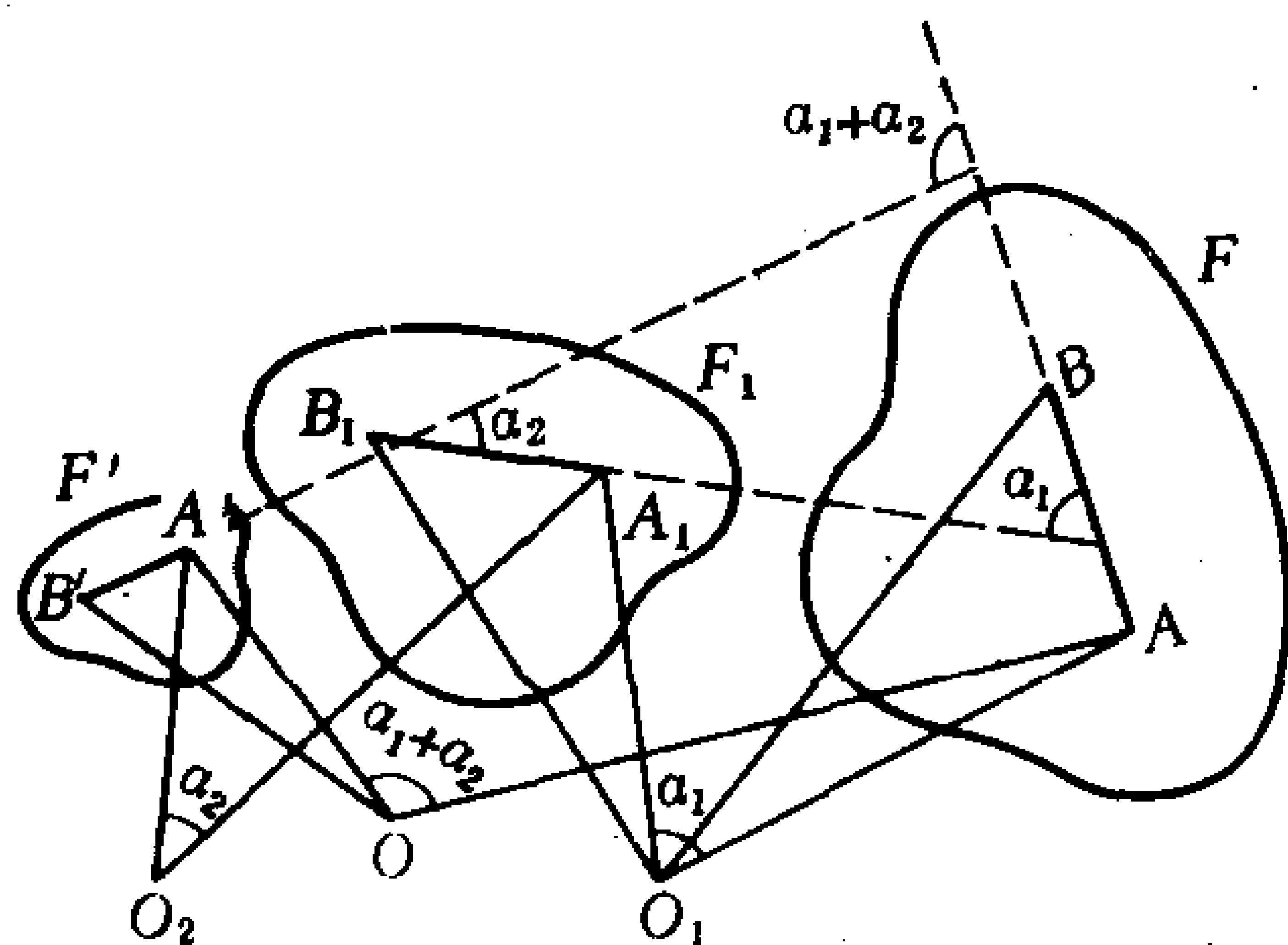


图 28

由前面的证明，这意味着 F' 是由 F 经过转角为 $\alpha_1+\alpha_2$，相似系数为 k_1k_2 的螺旋相似而得到；或者在 $\alpha_1+\alpha_2=360°$，$k_1k_2=1$ 的情形下，F' 是由 F 经过一个平移而得到. 因此，两个相似系数为 k_1 和 k_2，转角为 α_1和α_2 的螺旋相似之和是一个新的螺旋相似，其相似系数为 k_1k_2，转角为 $\alpha_1+\alpha_2$；在 $k_1k_2=$

① 在这里以及在后面，旋转角总是按某个固定的方向（例如按反时针方向）来度量.

1，并且 $\alpha_1+\alpha_2=360°$①的例外情形下，这两个螺旋相似之和是一个平移②.

让我们来找作为这两个给定螺旋相似之和的那个螺旋相似的中心 O（或找平移的方向和距离）. 如果两个螺旋相似的中心 O_1和O_2重合，则显然 O 也与它们重合. 现在假设 O_1与O_2不重合. 这两个螺旋相似之和把点 O_1 变到点 O_1'，实际上只是第二个旋转把 O_1 变到点 O_1'（因为第一个旋转保持 O_1 不动）. 不难作出点 O_1'. 这两个变换之和把某个点 $\bar{O}_2$变到O_2，实际上只是第一个旋转把点 $\bar{O}_2$ 变到 O_2（因为第二个旋转保持 O_2 不动）. 点 $\bar{O}_2$ 容易作出. 因此，若 $k_1k_2=1$，并且 $\alpha_1+\alpha_2=360°$，则线段 O_1O_1' 和线段 $\bar{O}_2O_2$ 平行、相等并且有相同的方向〔图 29(a)〕. 这两个线段的长度和方向就是所给的两个螺旋相似之和的那个平移的距离和方向. 如果两个螺旋相似之和是另一个螺旋相似，则这个新的螺旋相似把线段 $O_1\bar{O}_2$ 变成线段 $O_1'O_2$〔图 29(b)〕.

我们现在说明如何去找把给定线段 AB 变成另一条给定线段 $A'B'$ 的（在这里是 $O_1\bar{O}_2$ 变成 $O_1'O_2$）螺旋相似的中心 O③. 若这两个线段间的夹角是 180°或 360°，并且它们的长度不相等，则这个螺旋相似就是中心相似. 在这种情形下，O 就是直线 AA' 和 BB' 的交点〔图 30(a)〕. 现在设这两个线段间的夹角

---

① 更确切地说，$\alpha_1+\alpha_2$ 是 360°的倍数（见第一册第 28 页的注）.

② 我们建议读者设法给出螺旋相似加法定理的另一个证明，要求这个证明只用这种变换的定义，而不用"若在两个图形中对应线段有定比，并且构成定角，则它们可以彼此经过螺旋相似得到"这个事实.

③ 为了找中心 O，我们也可作一个顶角为 $\alpha_1+\alpha_2$〔或 $360°-(\alpha_1+\alpha_2)$〕，邻边之比为 k_1k_2 的辅助三角形，用这样的方法确定 $\triangle O_1'O_1O$ 的底角（见第 42 页注）.

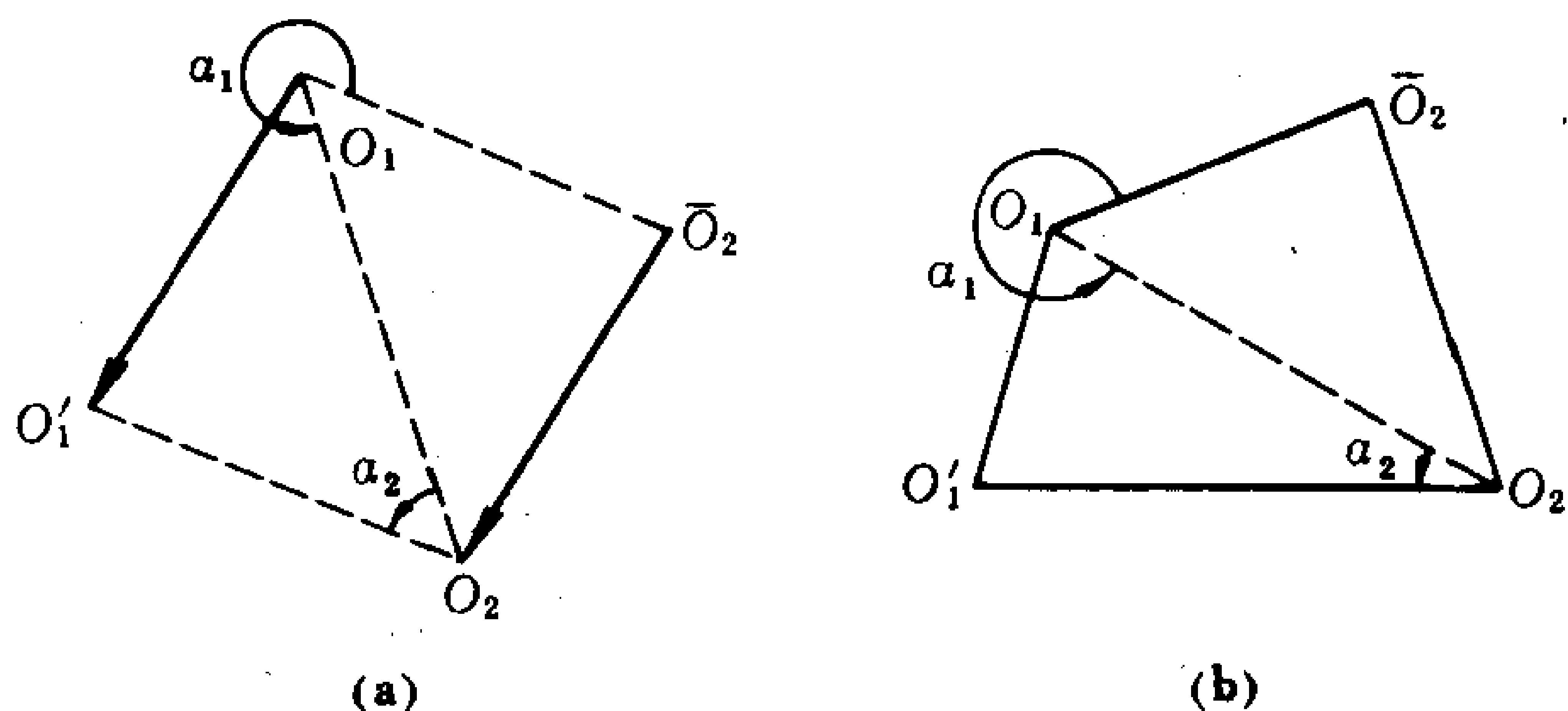


图 29

不是 180°的倍数，即线段 AB 和 $A'B'$ 不平行，命 P 是 AB 和 $A'B'$ 的交点〔图 30 (b)〕. 于是 $\triangle AA'P$ 和 $\triangle BB'P$ 的外接圆都经过旋转中心 O：事实上 $\angle AOA' = \angle APA'$（转角 AOA' 等于线段 AB 和 $A'B'$ 间的夹角 APA'）. 类似地 $\angle BOB' = \angle BPB'$. 所以中心 O 可以作为 $\triangle AA'P$ 和 $\triangle BB'P$ 的外接圆的第二个交点而被确定出来〔图 30(b)〕.

如果这两个圆在点 P 相切〔图 30 (c)〕，即若 $\angle PAA' = \angle PBB'$（这两个角都等于直线 $PA'B'$ 与两圆在 P 处的公切线的夹角），则 $O=P$（因为从 $\triangle PAA'$ 与 $\triangle PBB'$ 相似，我们有 $PA'/PA=PB'/PB$）.

我们还要注意把 AB 变到 $A'B'$ 的螺旋相似的中心与把 AA' 变到 BB' 的螺旋相似的中心是相同的. 事实上，若 $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$，并且 $OA'/OA = OB'/OB = k$，则有 $\angle AOB = \angle A'OB' = \beta$（在图 31 中，$\beta=\alpha+\angle A'OB$），并且 $OA/OB = OA'/OB' = l$. 由此可见中心 O 也可以作为 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle A'B'Q$ 的外接圆交点被定出来，这里 Q 是直线 AA' 和 BB' 的交点（或者当 $AA' \parallel BB'$ 时，O 就是直线 AB 和 $A'B'$ 的交点. 这种情形如图 30(c) 中所示，当 $\triangle AA'P$ 和 $\triangle BB'P$ 的外接圆在 P

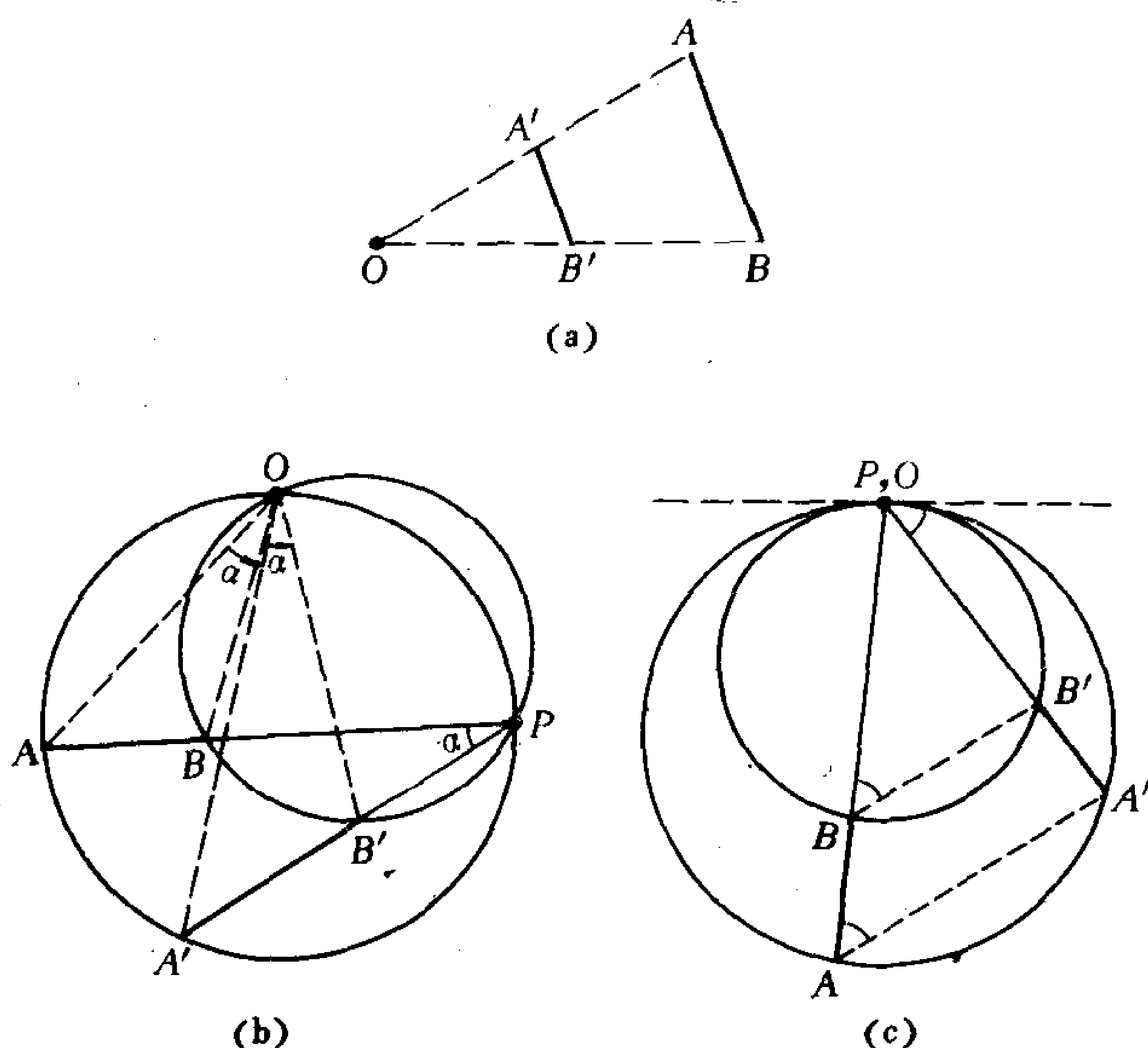


图 30

相切的时候出现).

35. 在平面上给定四条直线 l_1, l_2, l_3, l_4，它们之中任何三条不交于一点，并且任何两条都不平行. 证明：由这些直线所构成的四个三角形的外接圆交于同一点(图 32).

参看第二章 § 1 中问题 62 (a). 在第三册第二章 § 1 问题 218(a)中可以看到问题 35 的一个更有意义的推广.

36. 设 S_1和S_2 是分别以 O_1和O_2 为中心的两个圆，它们相交于点 A. 考虑顶点在 A 的一个定角 α. 命 M_1和M_2 是这个角的两条边与圆 S_1和S_2 的交点，J 是直线 O_1M_1和O_2M_2 的交点(图 33).

(a) 证明：当这个角绕点 A 转动时，$\triangle M_1M_2J$ 的外接圆总

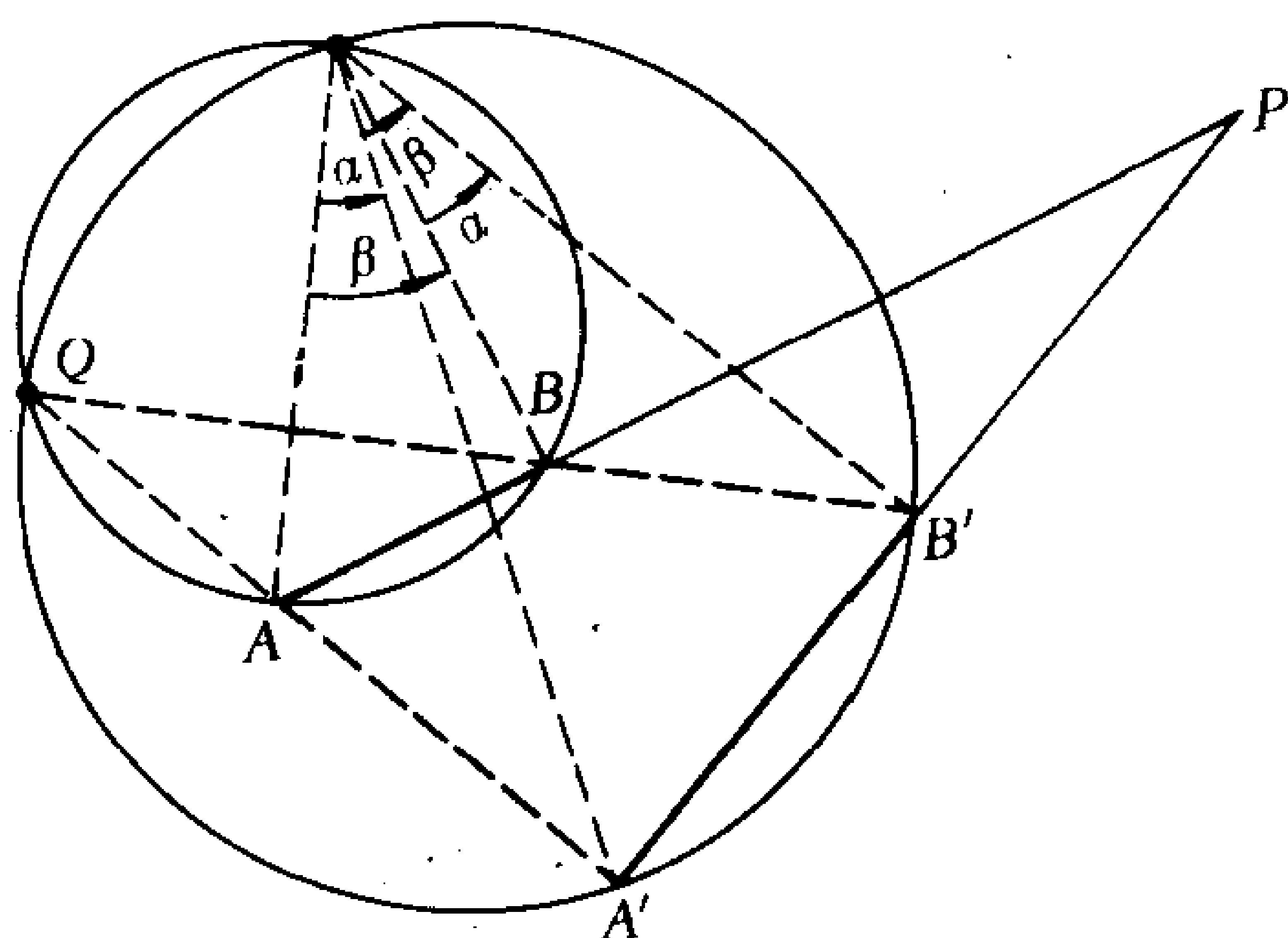


图 31

经过某固定点 O.

(b) 对应于各种可能的角 α，找出 (a) 中所叙述的点 O 的轨迹.

37. 求作 n 边形，使得分别以它的 n 条边为底作与 n 个给定的三角形相似的三角形时，这些三角形的顶点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为给定点. 问在什么条件下这个问题无解？什么时候有一个以上的解？

这个问题是第一册第一章 § 2 问题 21 的推广.

38. 设 S_1和S_2 是相交于点 M 和 N 的两个圆. 命 A 是 S_1 上任意一点，B 是直线 AM 与圆 S_2 的第二个交点，C 是 BN 与 S_1 的第二个交点，D 是 CM 与 S_2 的第二个交点，E 是 DN 与 S_1 的第二个交点①.

---

① 可能出现几个例外情形. 首先，若 $A=M$，则直线 AM 用 S_1 在 M 的切线代替；其次，若 A 处于这样的位置，使得 AM 与 S_2 相切，则 B 与 M 重合，所以 C 也与 M 重合. 于是正如第一种情形一样，直线 CM 必须用 S_1 在 M 的切线代替. 参看第 33 页上问题 23(a)的注.

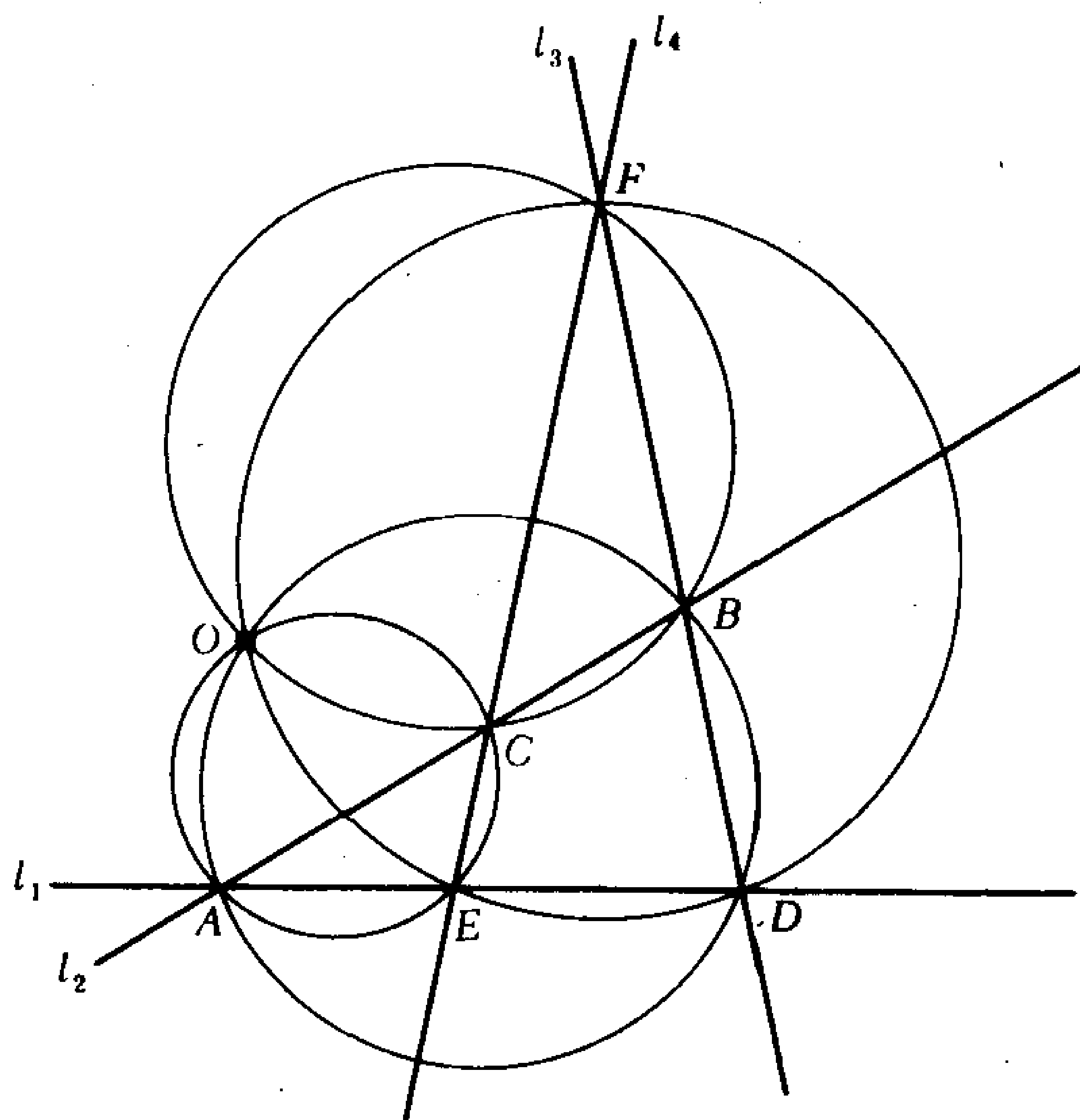


图 32

(a) 证明距离 AE 不依赖于 S_1 上初始点 A 的选取，而仅依赖于圆 S_1和S_2.

(b) 若要使 E 与 A 重合，问 S_1与S_2 必须处于怎样的位置？

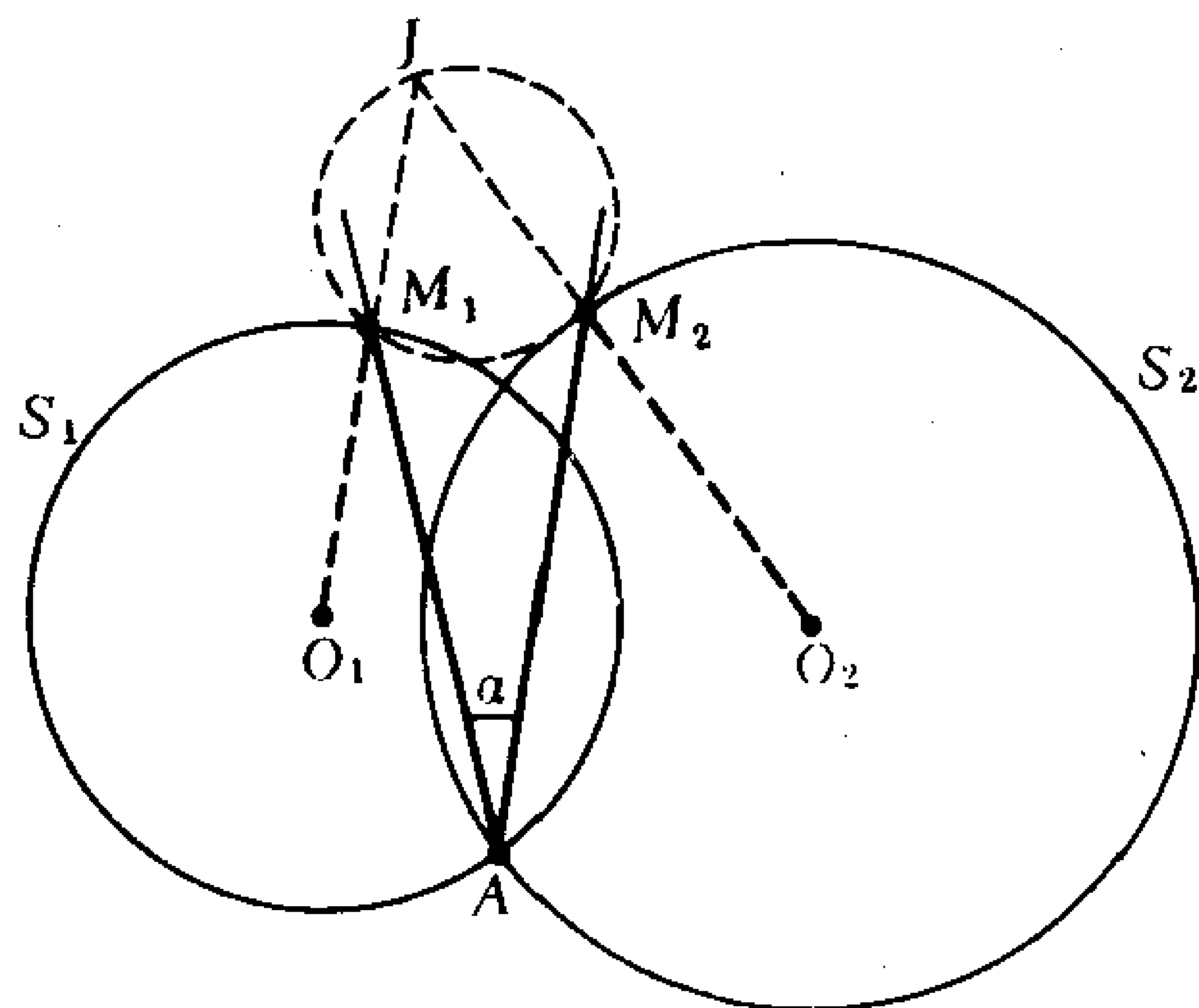


图 33

39. 设 S_1, S_2, S_3 是三个圆，其中每一个都与其它两个相交，并命 A_1是S_1 上的任意一点.

(a) 假设三个圆有一公共交点 N. 命 M_1,M_2,M_3 分别是 S_1 和 S_2,S_2 和 S_3,S_3 和 S_1 的第二个交点〔图 34 (a)〕. 设 A_2 是直线 A_1M_1 与 S_2 的第二个交点，A_3 是直线 A_2M_2 与 S_3 的第二个交点，A_4 是直线 A_3M_3 与 S_1 的第二个交点①. 证明 A_4与A_1 重合.

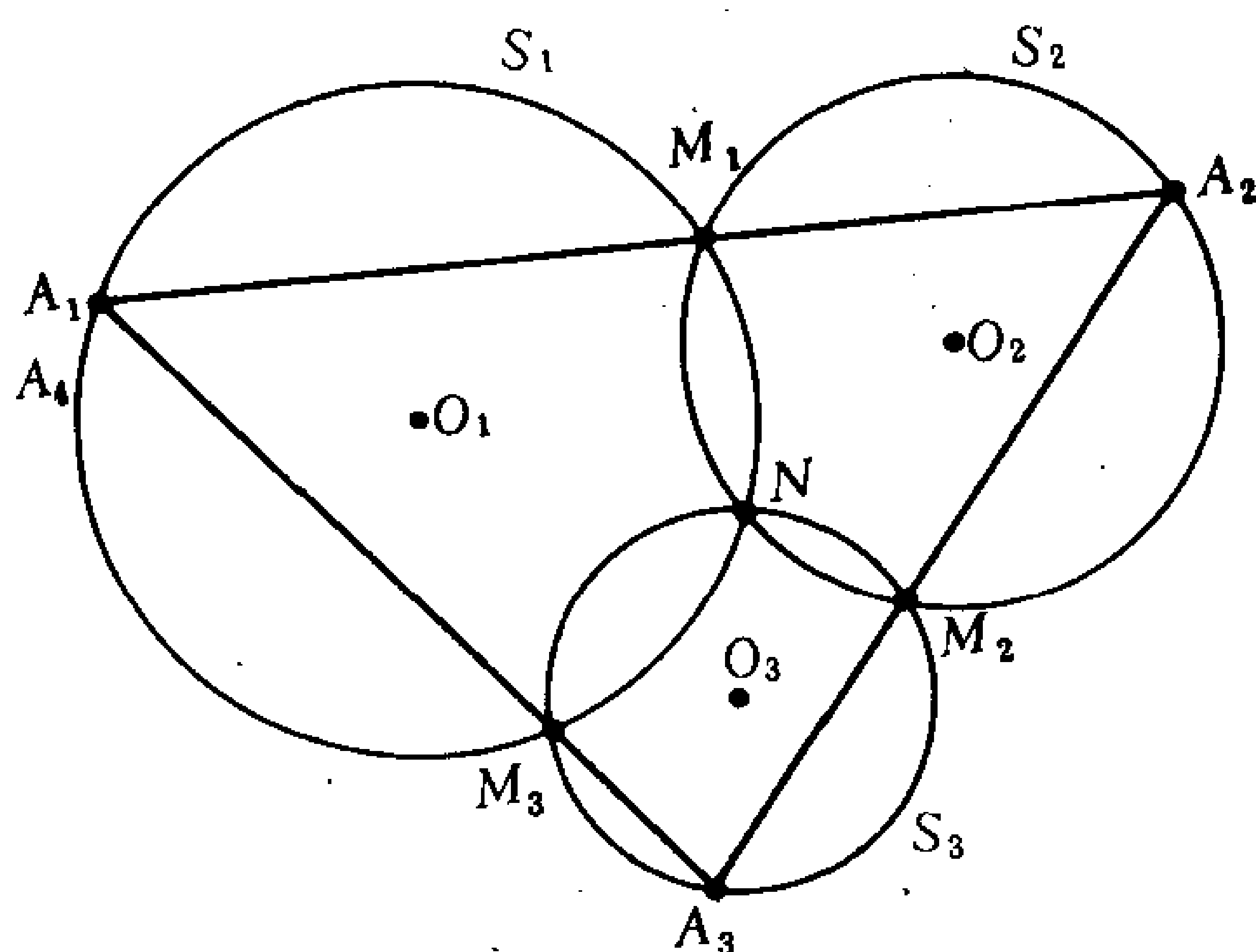


图 34(a)

(b) 假设三个圆没有公共点，并设 S_1与S_2 交于点 M_1和N_1,S_2与S_3 交于点 M_2 和 N_2,S_3 与 S_1 交于点 M_3 和 N_3〔图 34 (b)〕. 命 A_2 是 A_1M_1 与 S_2 的第二个交点，A_3 是 A_2M_2 与 S_3 的第二个交点，A_4 是 A_3M_3 与 S_1 的第二个交点，A_5 是 A_4N_1 与 S_2 的第二个交点，A_6 是 A_5N_2 与 S_3 的第二个交点，A_7 是 A_6N_3 与 S_1 的第二个交点②. 证明：A_7 与 A_1 重合.

---

① 例如，若 A_1M_1与S_2在M_1 相切，则我们认为 A_2与M_1 重合；另一方面，若点 A_2与M_2 重合，则直线 A_2M_2 是指 S_2在M_2 的切线(参看问题 38 的注).

② 见问题 38 和 39(a)的注.

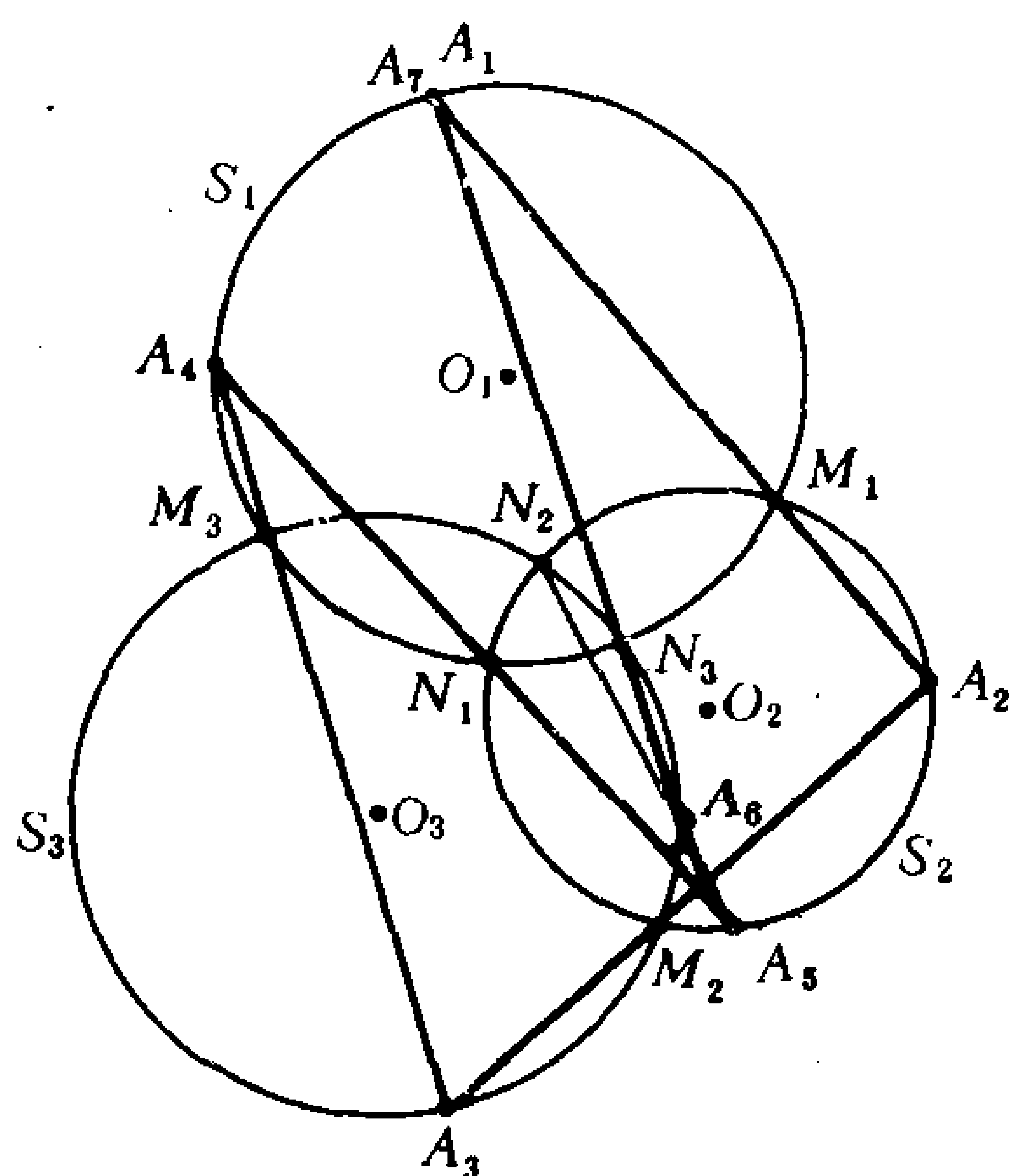


图 34(b)

把问题 39 (a) 和 (b) 的结果推广到任意多个两两相交的圆的情形.

40. 设 S_1和S_2是相交于点 M 和 N 的两个圆，l 是一条直线，A 是 S_1 上的任意一点.

(a) 设 l 与 S_1 交于点 K 和 L，并且与 S_2 交于点 P 和 Q〔图 35(a)〕. 命 B 是直线 AM 与圆 S_2 的第二个交点，C 是平行于 BP 的直线 KC 与 S_1 的第二个交点，D 是直线 CN 与 S_2 的第二个交点，E 是平行于 DQ 的直线 LE 与 S_1 的第二个交点①. 证明 E 与 A 重合.

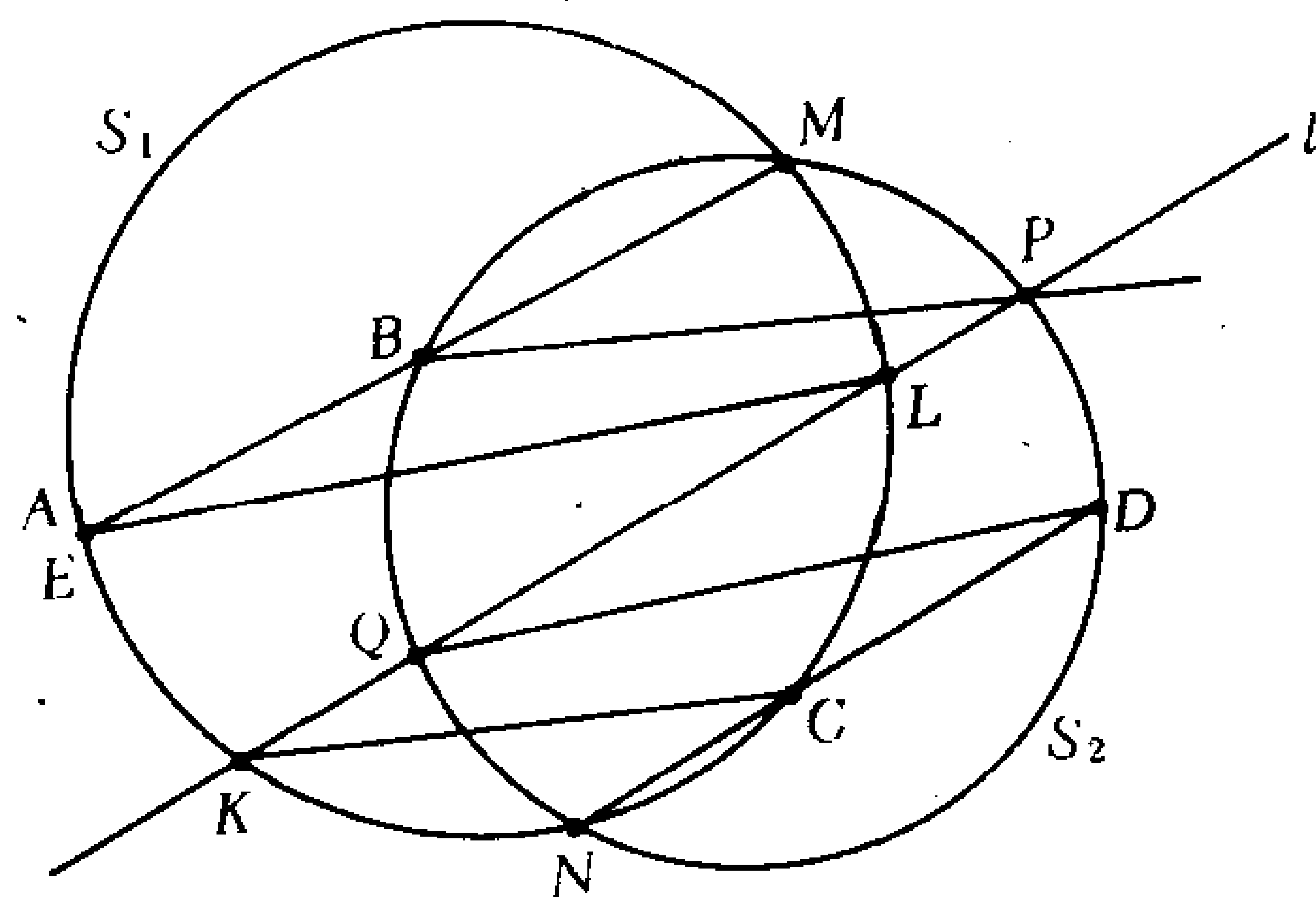
(b) 设直线 l 与 S_1和S_2分别在点 K 和 P 相切〔图 35(b)〕. 命 B 是直线 AM 与 S_2 的第二个交点，C 是平行于 BP 的直线 KC 与 S_1 的第二个交点，D 是直线 CN 与 S_2 的第二个交点，E 是平行于 DP 的直线 KE 与 S_1 的第二个交点②. 证明 E 与 A 重合.

设图形 F_1 中心相似于图形 F，以 O 为相似中心，并具有（正的！）相似系数 k. 命 F' 是由 F_1 经过对于过 O 的某直线 l 作反射得到的图形（图 36）. 这时我们称 F' 是由 F 经过相似

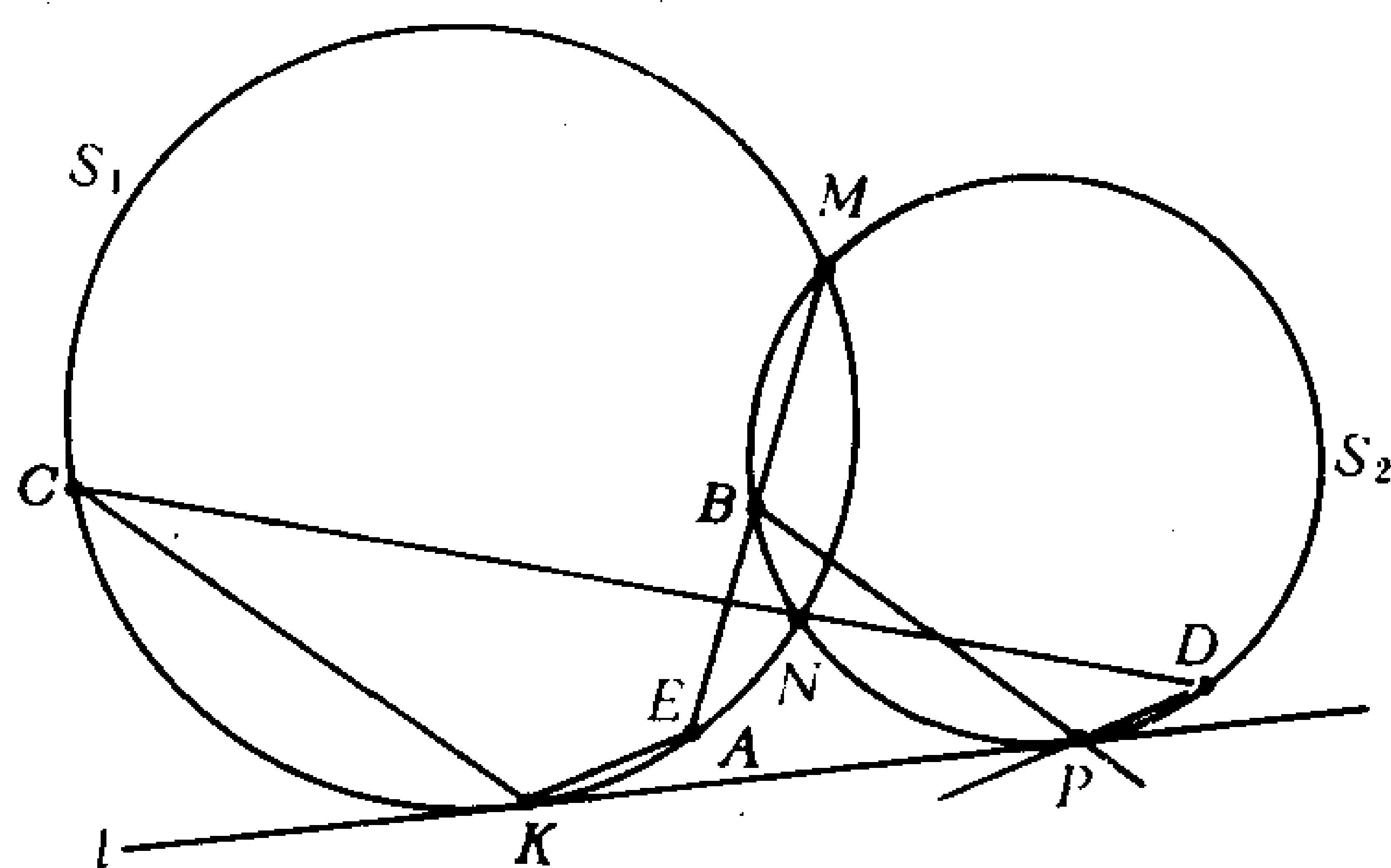
---

① 见问题 38 和 39(a)的注.

② 见问题 38 和 39(a)的注.



(a)



(b)

图 35

系数为 k 的膨胀反射而得到的；点 O 和直线 l 分别称为这个膨胀反射的中心和轴. 这个膨胀反射也可以通过另一种方式来实现：先作关于直线 l 的反射，把 F 变到 F_2，然后作中心为 O，系数为 k 的中心相似把 F_2 变到 F'. 换句话说，膨胀反射是一个以 O 为中心的中心相似与一个关于过 O 的直线 l 的反射

之和，这个和与两个变换施行的次序无关①.

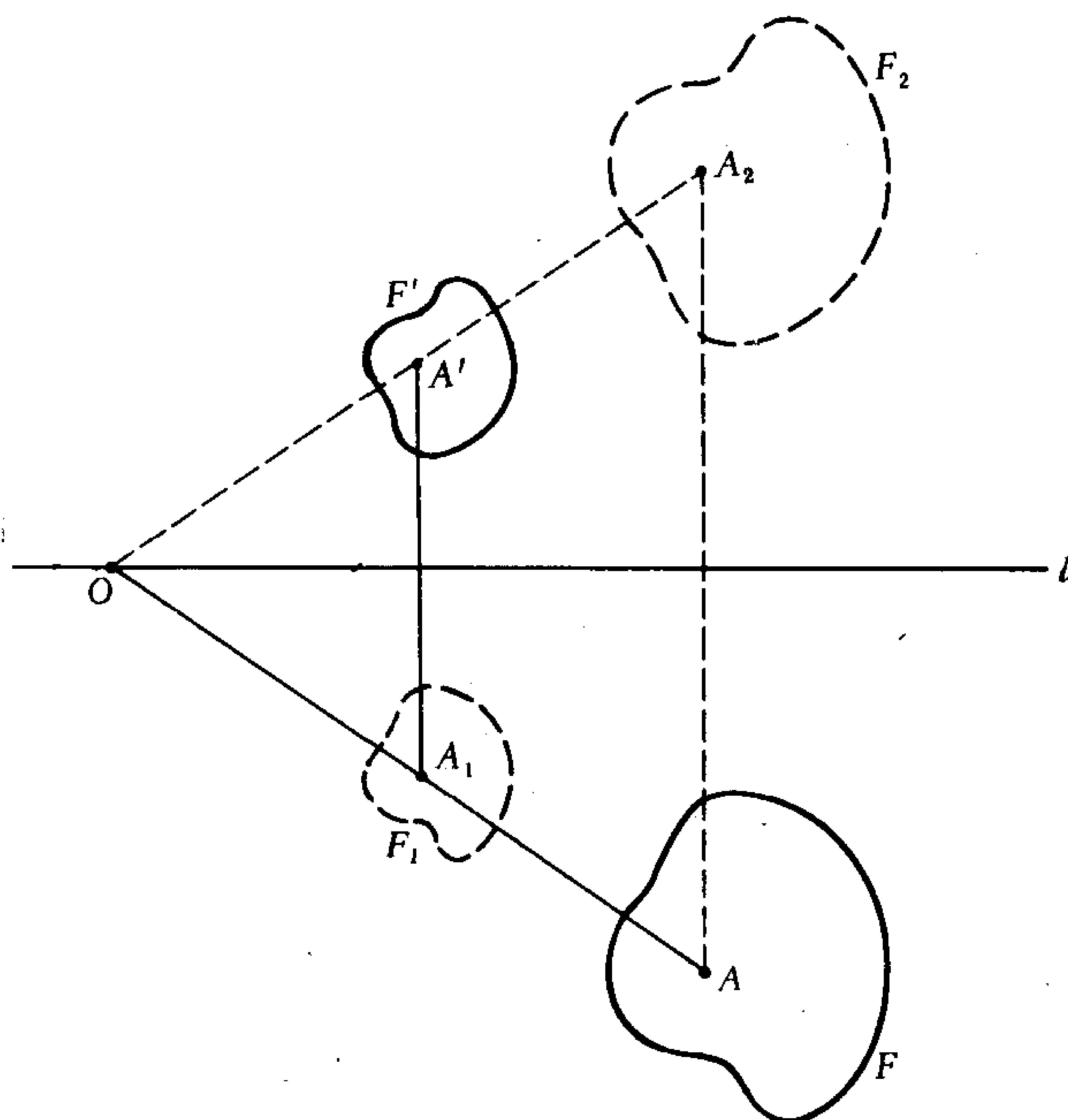


图 36

显然，若图形 F' 是由图形 F 经过膨胀反射得到的，则反过来，F 也可以由 F' 经过膨胀反射（有相同的中心 O 和轴 l，但相似系数为 $1/k$）得到. 因此我们可以说图形 F 和 F' 是互

① 由此可见，膨胀反射是本书引言中所定义的相似变换（因为它是一个相似变换与一个保距变换之和）.

相由膨胀反射得到的. 膨胀反射把直线 n 变成新的直线 n'〔图 37(a)〕,把圆 S 变成新的圆 S'〔图 37(b)〕.

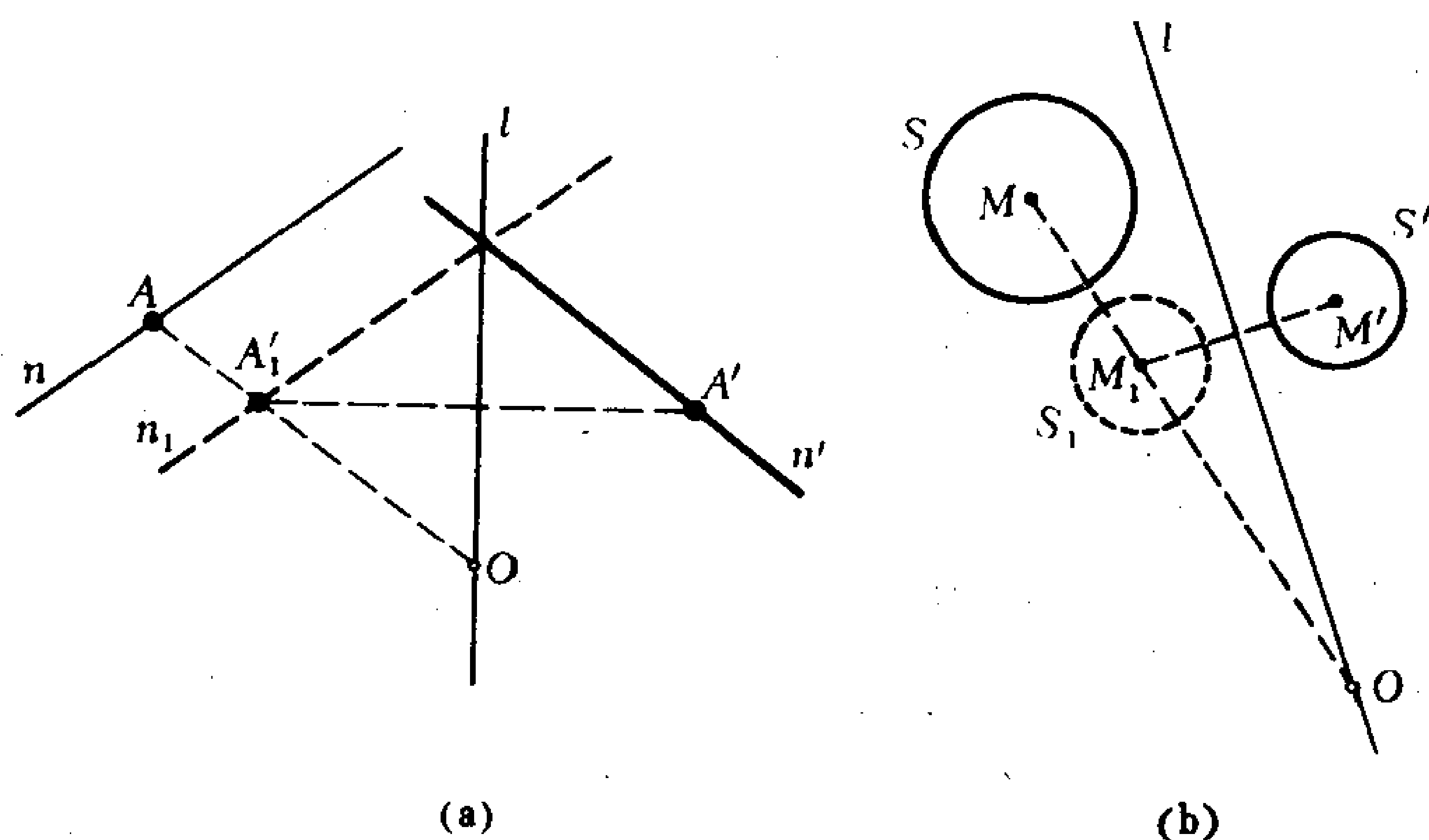


图 37

如果膨胀反射不是关于某直线 l 的反射(关于直线的反射可以看作相似系数等于 1 的膨胀反射),则它仅有的不动点是变换的中心 O. 膨胀反射(如果不是关于直线的反射)仅有的不动直线是变换的轴 l 和 l 在点 O 的垂线.

41. 设给定直线 l 和它上面的一点 A, 以及两个圆 S_1 和 S_2. 求作三角形 ABC, 使得直线 l 是它的角 A 的平分线, 它的顶点 B 和 C 分别在圆 S_1 和 S_2 上, 并且边 AB 和 AC 有给定的比 $m : n$.

42. 在下面各种已知条件下求作四边形 $ABCD$, 使得它的对角线 AC 平分角 A:

(a) 已知边 AB 和 AD, 对角线 AC, 角 B 和角 D 之差;

(b) 已知边 BC 和 CD，边 AB 与 AD 之比，角 B 和角 D 之差；

(c) 已知边 AB 和 AD，对角线 AC，边 BC 与 CD 之比.

43. 把问题 42 中的条件"对角线 AC 平分角 A"改为更一般的条件："角 BAC 与角 DAC 有给定的差 r"，再求解同样的问题.

44. 在平面上给定两条直线 l_1和l_2，对平面上每个点 M 以如下的方式关联一个新的点 M'.

(a) 设 m 是过点 M 的直线，并且 m 介于 l_1和l_2之间的线段 PQ 被 M 所平分①. 设 P' 是 P 在 l_2 上的垂直投影，Q' 是 Q 在 l_1 上的垂直投影，命 M' 是 $P'Q'$ 的中点〔图 38(a)〕.

(b) 设 O 是 l_1和l_2 的交点，M_1和M_2 分别是点 M 在 l_1和l_2 上的垂直投影，命 M' 是三角形 OM_1M_2 的高的交点（即垂心）〔图 38(b)〕.

现在假设 M 描出圆 S，问 M' 将描出什么样的轨迹？

正象我们曾经把正向全等图形与反向全等图形加以区别一样（见第一册第 55 页），我们也把平面上的两类相似图形加以区别. 设 F 和 F' 是两个相似图形，用 F_1 表示以 F' 和 F 中的对应线段之比为相似系数，中心相似于 F 的图形，如果 F_1 与 F' 正向全等〔图 39(a)〕，则称 F 与 F' **是正向相似的**；若 F_1 与 F' 反向全等，则称 F 与 F' **是反向相似的**〔图 39(b)〕. 仅当两个相似图形是正向相似或反向相似对我们来说是无关紧要的情况下，我们才不加修饰地说这两个图形是相似的. 为判定

① 为了作出 m，只须过 M 引任意一条直线 n 交 l_1于P_1，然后在 n 上截取 $MQ_1 = MP_1$，于是有 $QQ_1 /\!/ l_1$〔图 38(a)〕.

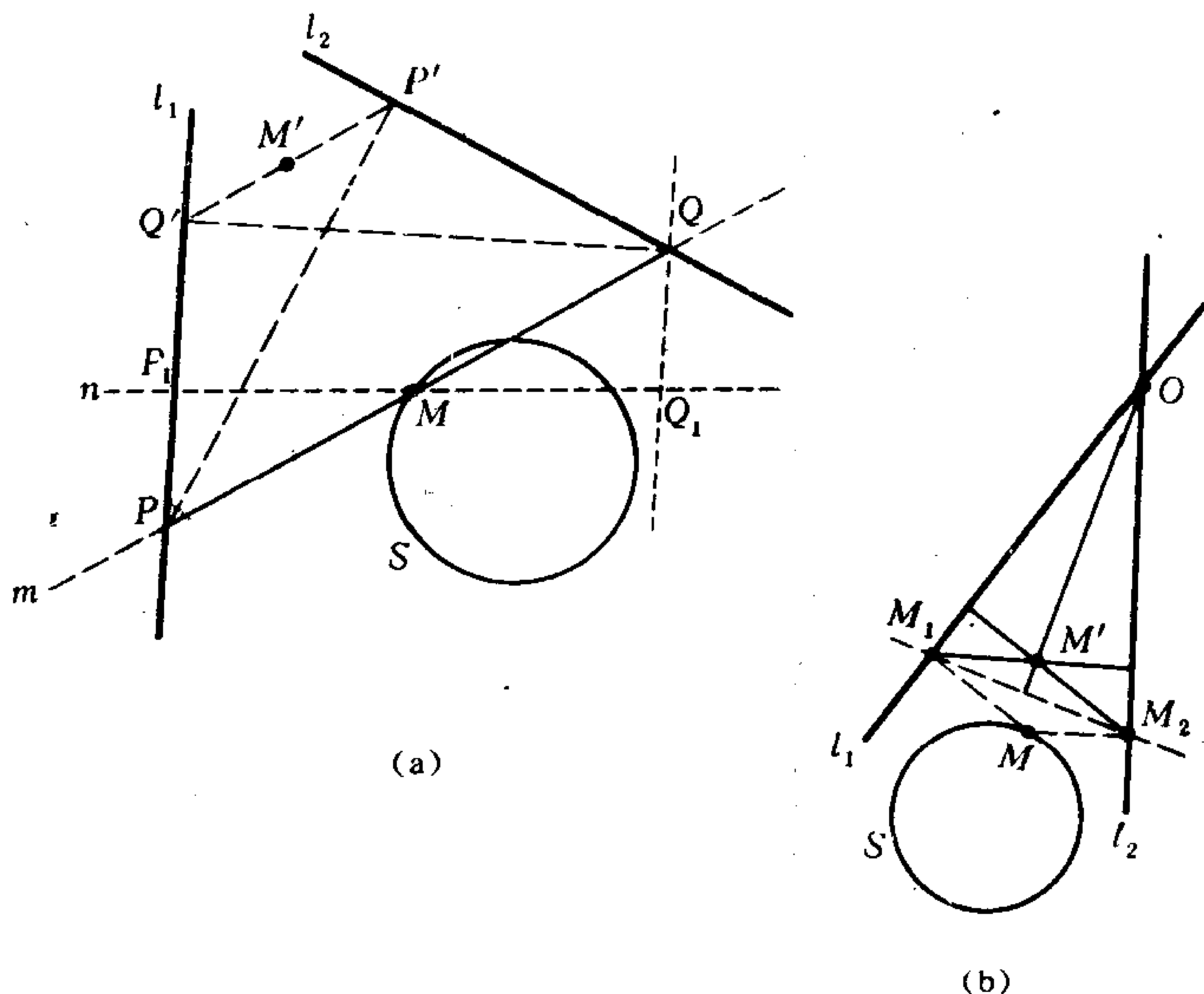


图 38

两个给定的相似图形 F 和 F' 是正向相似还是反向相似，只须考虑 F 中任意不共线的三个点 A, B, C 和它们在 F' 中的对应点 A'，B'，C'．若 F 与 F' 正向相似，则（相似的）$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边界的环绕方向相同；否则它们的边界的环绕方向相反〔见图 39(a)和(b)〕.

现在我们证明下面两个重要定理.

定理 1 平面上任何两个正向相似图形可以通过一个螺

旋相似或平移使之重合①.

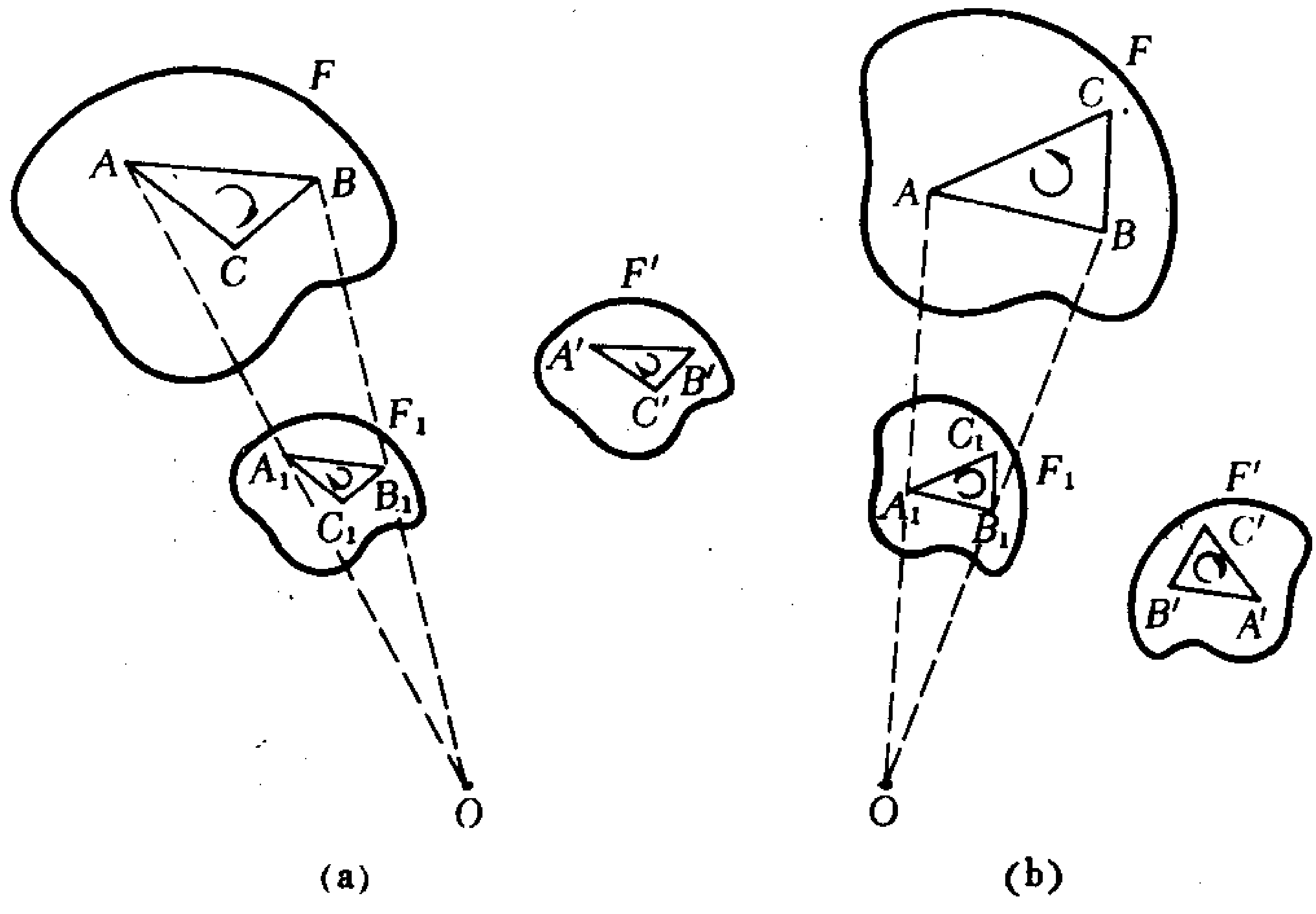


图 39

这个定理的证明几乎与第一册第二章§2中定理1的证明没有什么不同. 首先容易证明，任何两条线段 AB 和 $A'B'$ 能够通过一个转角等于这两条线段的夹角，相似系数等于这两条线段之比的螺旋相似使之重合. 仅有的例外情形出现在这两条线段不仅相等、平行并且有相同方向的时候，而在这种

① 由这个定理可见，平面上任何两个正向相似但不全等的图形可以通过一个螺旋相似使之重合(因为若图形可以经过一个平移使之重合，则它们是全等的).

情形下，它们可以经过一个平移彼此互变（见第 44 页和第一册第 12—13 页，在那里证明了一个关于任意图形的更一般的结果）. 现在通过一个螺旋相似或平移把图形 F 的某线段 AB 变到与 F 正向相似的图形 F' 中的对应线段 $A'B'$. 不难证明这个螺旋相似也把整个图形 F 变到 F'. 它的证明完全类似于第一册第二章 §2 定理 1 的证明中的最后一部分.

若 F 与 F' 可以通过一个中心为 O 的螺旋相似使之重合，则称 O 为 F 和 F' 的**旋转中心**（有时也称 O 为**相似中心**）. 为了找两个正向相似图形 F 与 F' 的旋转中心，必须在这两个图形中选取一对对应线段 AB 与 $A'B'$. 若直线 AB 与 $A'B'$ 相交于点 P，直线 AA' 与 BB' 交于点 Q，则 O 是 $\triangle PAA'$ 和 $\triangle PBB'$ 的外接圆的另一个交点，或者是 $\triangle QAB$ 和 $\triangle QA'B'$ 的外接圆的第二个交点（见第 44—45 页）. 若 $AB /\!/ A'B'$，则 O 与 Q 重合. 若 $AA' /\!/ BB'$，则 O 与 P 重合. 最后若 $AB /\!/ A'B'$，并且 $AA' /\!/ BB'$，则线段 AB 和 $A'B'$ 不仅相等、平行并且有相同的方向；在这种情形下，图形 F 与 F' 可以通过一个平移彼此互变，因而没有旋转中心.

定理 2 平面上任何两个反向相似图形可以通过一个膨胀反射或滑动反射使之重合①.

这个定理的证明与第一册第二章 §2 中定理 2 的证明很相似. 设 F' 是与图形 F 反向相似的图形，A 和 B 是 F 中任意两点，A' 和 B' 分别是 A 和 B 在图形 F' 中的对应点. 我们要证明存在一个膨胀反射（或滑动反射）把线段 AB 变成线段

---

① 特别地，由这个定理可见：平面上任何两个反向相似但不全等的图形，可以彼此通过一个膨胀反射得到（因为若两个图形可经过一个滑动反射使之重合，则它们是全等的）.

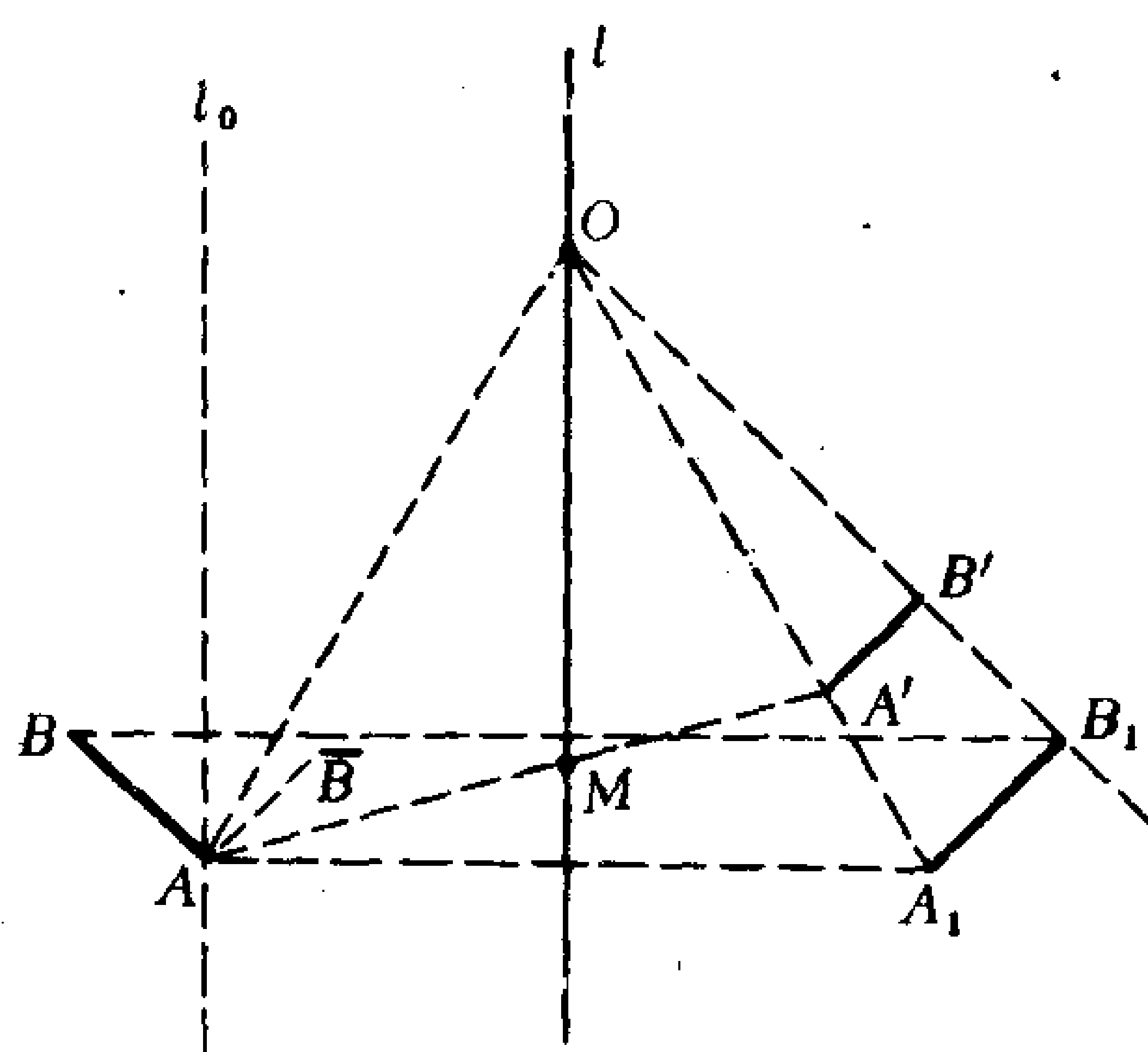


图 40

$A'B'$. 事实上,命 l 是所要找的把 AB 变到 $A'B'$ 的膨胀(或滑动)反射的轴(图40). 平移 $A'B'$ 到新的位置 $A\bar{B}$. 由 AB 经过关于 l 的反射所得到的线段 A_1B_1,或者是中心相似于 $A'B'$,或者是由 $A'B'$ 经过平移而得到. 因此线段 A_1B_1与$A\bar{B}$ 都平行于 $A'B'$. 由于 A_1B_1 是 AB 关于 l 的反射像,并且 A_1B_1 平行于 $A\bar{B}$,由此即知 l 平行于角 $\bar{B}AB$ 的平分线 l_0.

进一步设 $A'B' \neq AB$,并且 O 是把 AB 变到 $A'B'$ 的膨胀反射的中心. 则 l 是三角形 AOA_1 的一条角平分线,因此它也是三角形 AOA' 的一条角平分线. 所以直线 AA' 和 l 的交点 M,使得

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OA'}{OA_1}=\frac{A'B'}{A_1B_1},$$

或者

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{A'B'}{AB}.$$

这样一来,若知道线段 AB 和 $A'B'$,则我们能够作出直线 l:它平行于角 $\bar{B}AB$ 的平分线,并且分线段 AA' 为 $A'B'/AB$(这个作法甚至当 $A'B'=AB$ 时也有效. 见第一册第二章§2

定理 2 的证明). 作关于 l 的反射把线段 AB 变成平行于 $A'B'$ 的线段 A_1B_1. 再作一个以 $A'A_1$ 与 l 的交点 O 为中心的中心相似(因为 $OA'/OA_1=OA'/OA=A'M/MA=A'B'/AB$)或一个沿直线 l 方向的平移，便把 A_1B_1 变成 $A'B'$. 这样一来，就找到了把线段 AB 变到线段 $A'B'$ 的膨胀(或滑动)反射. 定理 2 证明中的最后部分几乎与第一册第二章定理 2 证明中的最后部分逐字相同，在这里我们把它省掉了.

定理 2 和定理 1 可以综合成下面的**命题**:

平面上任何两个相似图形可以通过一个螺旋相似，或者一个膨胀反射，或者一个平移，或者一个滑动反射彼此互变①.

这个命题可以作为平面上相似变换的定义(见第一册第 63—64 页). 也就是说，相似变换是下面四类变换中的任何一种变换:

1) 螺旋相似(包括中心相似和绕某个点的旋转);

2) 膨胀反射;

3) 平移;

4) 滑动反射(包括关于直线的反射).

把 1), 3) 类变换称为*正向相似变换*(它把图形变成与之正向相似的图形)，而把 2), 4) 类变换称为*反向相似变换*(它把图形变成与之反向相似的图形)是自然的.

定理 1 和定理 2 使我们能推广第一册第二章 § 2 中的问题 45—47: 把要求问题 45 中的线段 AX 和 BY，问题 46 中的线段 AX, BY 和 CZ，问题 47 中的线段 BP, PQ 和 QC "是全等

---

① 特别地，任何两个相似但不全等的图形，可以通过一个螺旋相似，或一个膨胀反射彼此互变.

的"改为要求它们"有给定的比". 这些更一般的问题的解法与原来问题的解法是类似的，我们建议读者自己去解这些问题.

从定理 1 和定理 2 可见，所有相似变换的共同性质正是螺旋相似，膨胀反射，平移和滑动反射（见上面相似变换的定义）所共有的那些性质. 例如，每个相似变换都把直线变成直线，把圆变成圆①. 还有，每个相似变换或有一个不动点或有一条不动直线，因为上面所列四类相似变换中没有不动点的仅有平移和滑动反射，但是它们有不动直线. 最后，每个反向相似变换至少有一条不动直线. 事实上，膨胀反射正好有两条不动直线. 而滑动反射（如果不是关于直线的反射）恰有一条

---

① 顺便指出，把相似变换定义为平面上保持点之间距离之比的变换，也能得出这样的性质. 事实上，直线 AB 可以定义为这样一些点 M 所成的集合，它们使得三个距离 AM, BM, AB 中最大的一个等于其它两个之和，即 M 满足或者

$$\frac{AM}{AB}+\frac{BM}{AB}=1, \quad \text{或者} \quad \frac{BM}{AM}+\frac{AB}{AM}=1,$$

或者

$$\frac{AM}{BM}+\frac{AB}{BM}=1$$

〔图 41 (a)〕. 但是一个把点 A 和 B 变到 A' 和 B' 的相似变换把上述点 M 的集合变为这样一些点 M' 的集合，它们使得

$$\frac{A'M'}{A'B'}+\frac{B'M'}{A'B'}=1, \quad \text{或者} \quad \frac{B'M'}{A'M'}+\frac{A'B'}{A'M'}=1,$$

或者

$$\frac{A'M'}{B'M'}+\frac{A'B'}{B'M'}=1,$$

即直线 AB 变成直线 $A'B'$.

用类似的方式可以定义以 O 为中心的圆是具有这样性质的点所成的集合 S，即若 M_1和M_2是 S 的任意两个点，则有 $OM_1=OM_2$，即 $OM_1/OM_2=1$〔图 41 (b)〕. 但是把点 O 变到某个点 O' 的相似变换也把上面所述的集合 S 变成具有同样性质的点所成的集合 S'，即若 M'_1和M'_2 是 S' 中任意两点，则有 $O'M'_1/O'M'_2=1$. 换句话说，这样的变换把以 O 为心的圆变成以 O' 为心的圆.

不动直线. 如果滑动反射是关于直线的反射,则它有无穷多条不动直线.

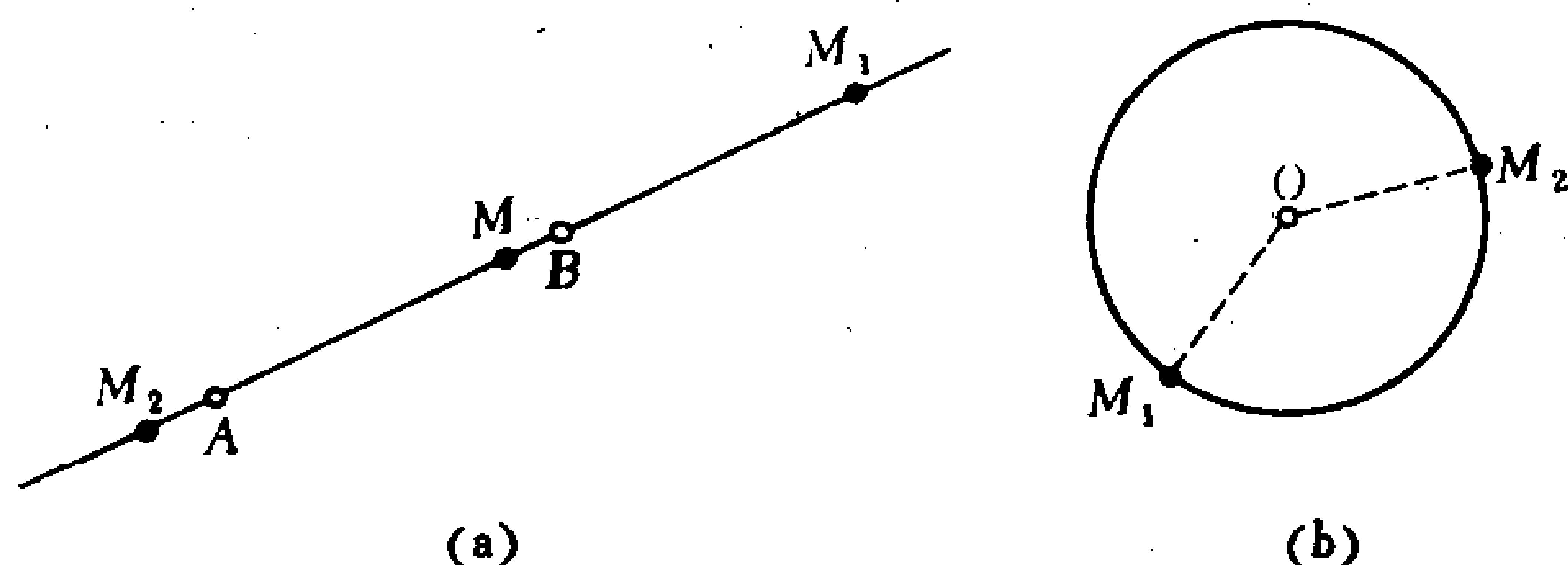


图 41

有趣的是上面所列举的相似变换的第一个性质是相似变换的特征,即它可以用来作为相似变换的(描述性的!)定义①:**平面上任何一个把每条直线变成直线,并且把每个圆变成圆的变换必定是相似变换.** 换句话说,任何一个这种变换必定保持点之间距离的比:若点 A, B, C, D 经过这种变换变成 A', B', C', D', 则有

$$\frac{C'D'}{A'B'}=\frac{CD}{AB}.$$

这一事实突出了相似变换在初等几何中(即在关于直线、圆和由某些线段及圆弧所围成的图形的性质的研究中)的基本作用.

为了证明上面楷体字的命题②,我们必须证明把直线变成直线,并且把圆变成圆的变换必定把相距 d 单位的每对点 A, B 变成相距 d' 单位的一对点 A', B', 这里 d' 仅依赖于 d, 而

---

① 参看第一册第 63—64 页.

② 参看第三册第二章 § 4.

不依赖于点 A, B 的特别选取！例如，可以用下面的方式来论证.

我们首先注意，平面到自身的把直线变成直线的任何变换，必定把平行直线变成平行直线. 事实上，若我们的变换把平行直线 k, l 变成了在某个点 M 相交的直线 k', l'（图 42），则被变到点 M 的那个点必定同时在 k 和 l 上，但这样的点是不存在的.

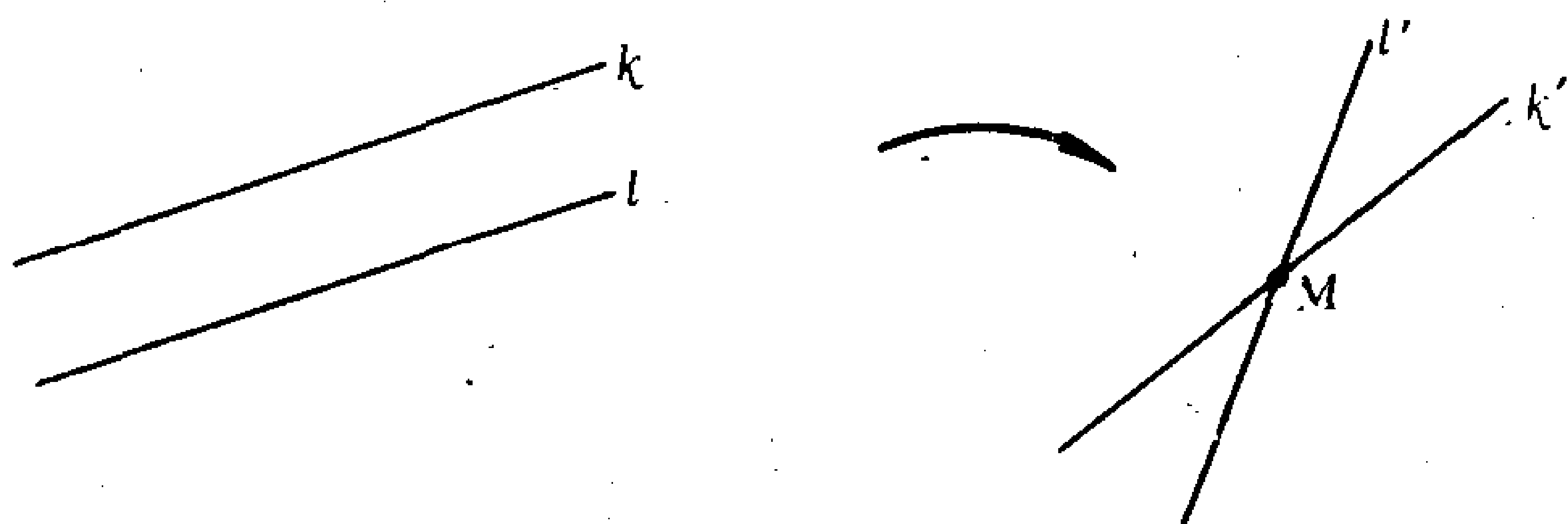


图 42

其次，显然可见，若一个变换把直线变成直线，并且把圆变成圆，则它把相交于两点的两个圆变成相交于两点的两个圆，并且把交于两点的一条直线和一个圆变成交于两点的一条直线和一个圆. 还有，它把两个相切的圆（即恰有一个公共点的两个圆）和一个圆与一条切线分别变成两个相切的圆和一个圆与一条切线. 最后，它把不相交的两个圆和不相交的一个圆与一条直线分别变成不相交的两个圆和不相交的一个圆与一条直线. 由所有这些可知，它把两个全等的圆（即两个有平行公切线的圆）变成全等的圆（图 43）. 还有，若我们的变换把圆 S 变为圆 S'，则它必定把 S 的中心 O 变到 S' 的中心 O'. 事实上，点 O 可以用"任何两个过 O 并且与 S 相切的圆都是全等的"这个事实来刻划. 同样，O' 可以用"任何两个过 O' 并

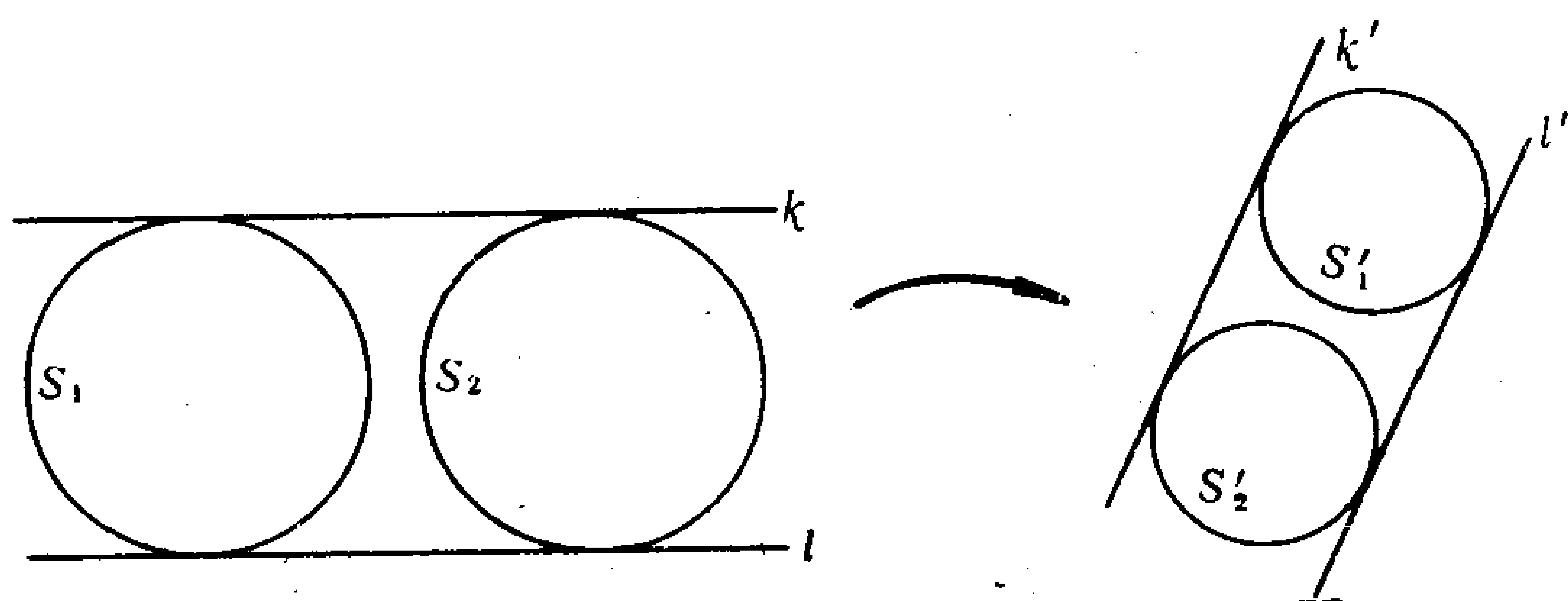


图 43

且与 S' 相切的圆都是全等的"这个事实来刻划(图 44).但是我们已经知道,在我们的变换下全等的圆变成全等的圆,相切的圆变成相切的圆,所以 O 必定变成 O'.

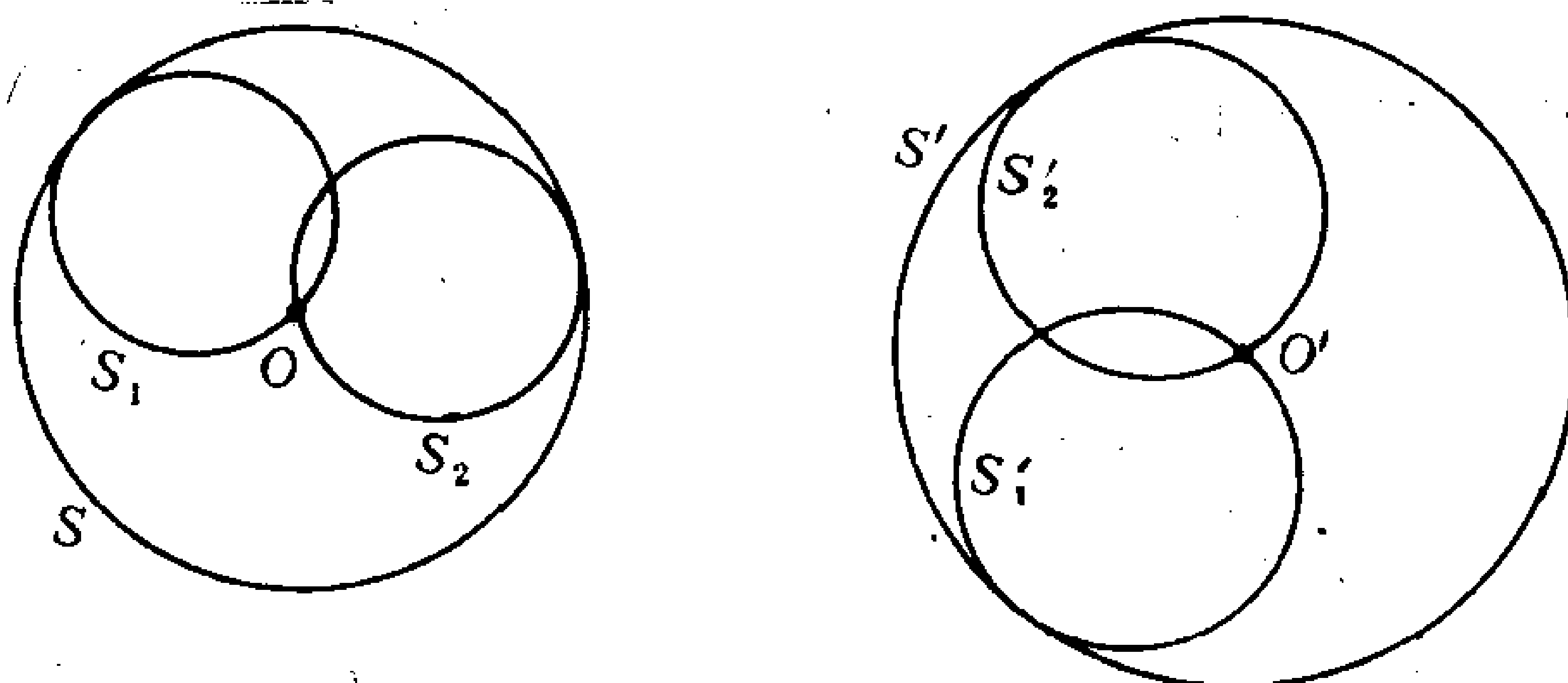


图 44

现在容易看出,若线段 AB 与 CD 相等,即若以 A 为心,以 AB 为半径的圆 S_1 和以 C 为心,以 CD 为半径的圆 S_2 全等,则上述变换必定把点 A,B,C,D 变到这样的点 A',B',C',D',使得以 A' 为中心,以 $A'B'$ 为半径的圆 S_1' 和以 C' 为中心,以 $C'D'$ 为半径的圆 S_2' 是全等的(图 45).因此,我们证明了:若线段 AB 和 CD 有同样的长度,则变换后得到的线段 $A'B'$ 和 $C'D'$ 也有同样的长度.

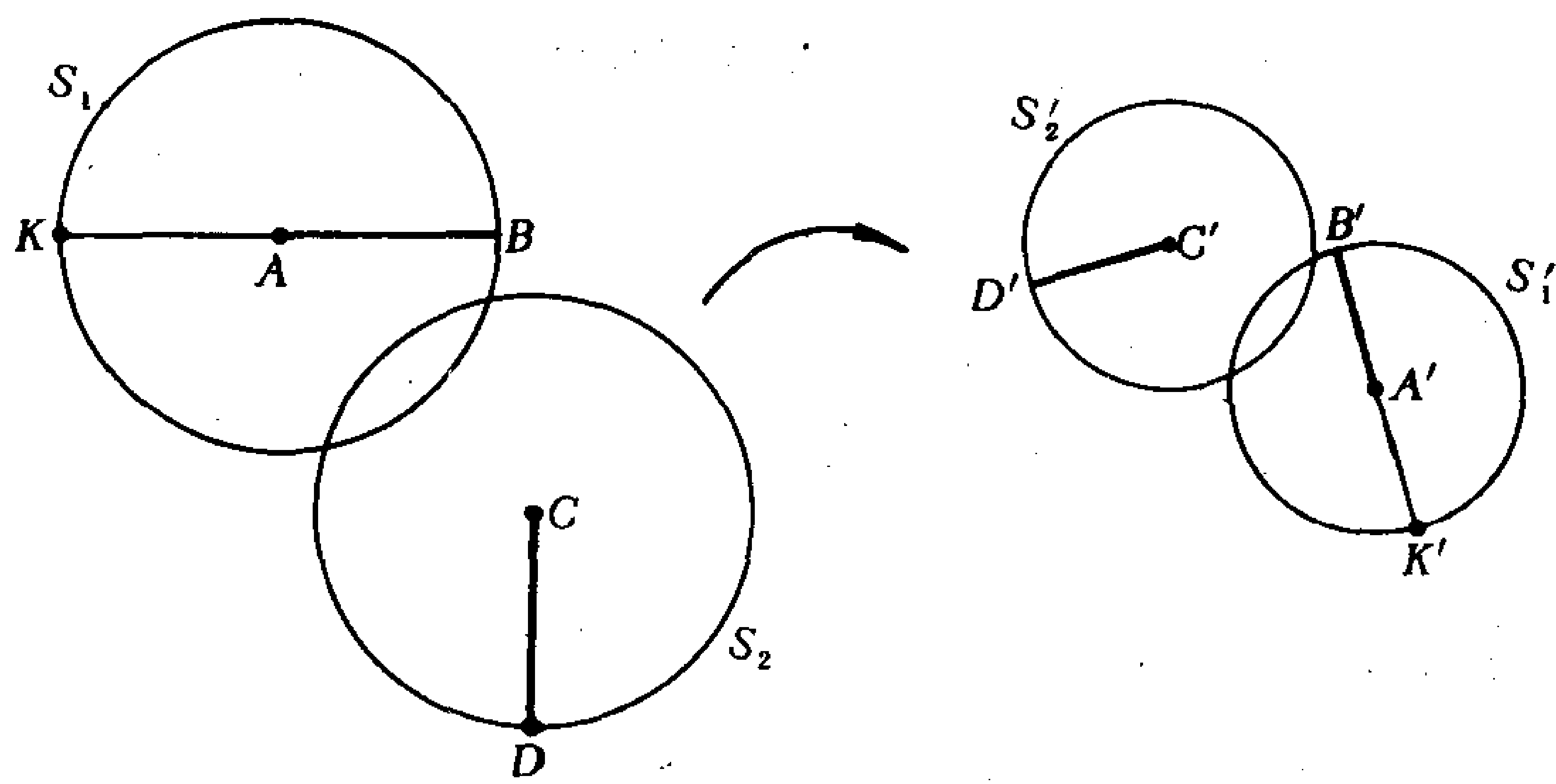


图 45

证明的最后部分是相当标准的. 这类证明在几何学中也是常见的. 首先注意若在一直线上有三个点 K, A, B 使得 $KA=AB$, 则我们的变换将把它们变成在一直线上的三个点 K', A', B', 使得 $K'A'=A'B'$, 这个结论可以由我们的变换把两条相等线段变成相等线段的事实得出(图 45). 由此立即知道, 若比 $CD/AB=m/n$ 是有理数(m 和 n 是正整数), 则我们的变换把点 A, B, C, D 变成 A', B', C', D', 使得 $C'D'/A'B'=CD/AB(=m/n)$. 事实上, 条件 $CD/AB=m/n$ 等价于在直线 AB 上存在 $n-1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 和在直线 CD 上存在 $m-1$ 个点 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$, 使得

$$AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}B=CC_1=C_1C_2=\cdots=C_{m-1}D;$$

但我们的变换显然把这些点变成点 A_1', A_2', $\cdots$, A_n'; C_1', C_2', $\cdots$, C_{m-1}', 其中前 $n-1$ 个落在 $A'B'$ 上, 后 $m-1$ 个落在直线 $C'D'$ 上, 并且使得

$$A'A_1'=A_1'A_2'=\cdots=A_{n-1}'B'=C'C_1'=C_1'C_2'=\cdots=C_{m-1}'D'$$

〔图 46(a)〕.

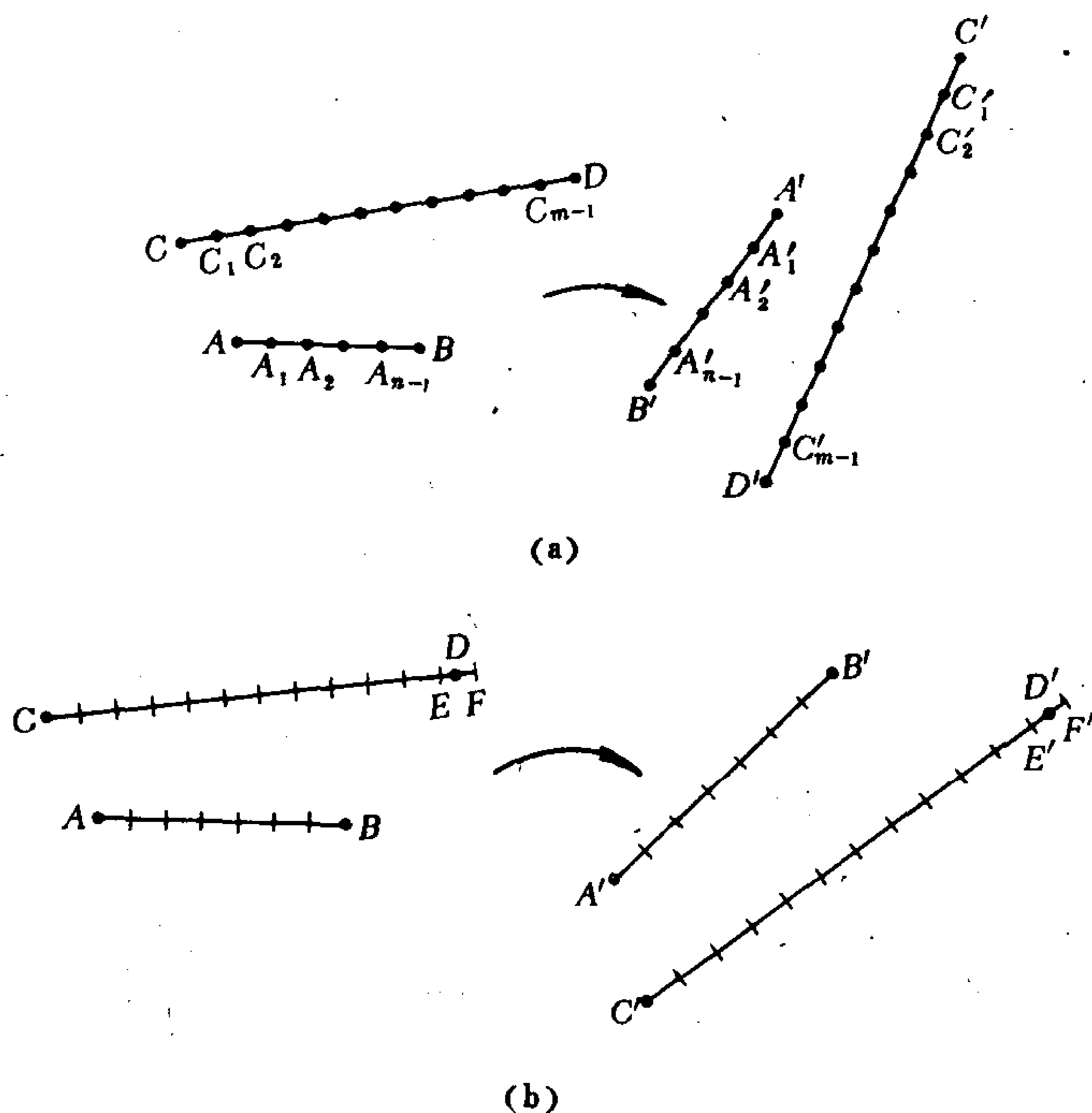


图 46

其次，只要再注意：若 $MN>PQ$，则 N 落在以 M 为心，以 PQ 为半径的圆 S 的外边，即从 N 我们可以引 S 的两条切线. 不难看出，我们的变换把满足 $MN>PQ$ 的点 M,N,P,Q 变成满足 $M'N'>P'Q'$ 的点 M',N',P',Q' (图 47). 所以若距离 AB 与 CD 之比不是有理数，并且

$$\frac{m}{n}<\frac{CD}{AB}<\frac{m+1}{n},$$

其中 m 和 n 是正整数，则有直线 CD 上的点 E 和 F，使得

$$\frac{CE}{AB}=\frac{m}{n},\qquad \frac{CF}{AB}=\frac{m+1}{n},$$

并且 $$CE<CD<CF.$$

于是我们的变换把点 A,B,C,D,E,F 变到点 A',B',C',D',E',F'，使得 E' 和 F' 落在直线 $C'D'$ 上，并且满足

$$\frac{C'E'}{A'B'}=\frac{m}{n},\qquad \frac{C'F'}{A'B'}=\frac{m+1}{n}$$

和 $$C'E'<C'D'<C'F'$$

〔图 46(b)〕. 由此推得

$$\frac{m}{n}<\frac{C'D'}{A'B'}<\frac{m+1}{n}.$$

在这一不等式以及与之相应的关于 CD/AB 的不等式中，分母 n 可以任意大，于是我们得到 $C'D'/A'B'=CD/AB$.

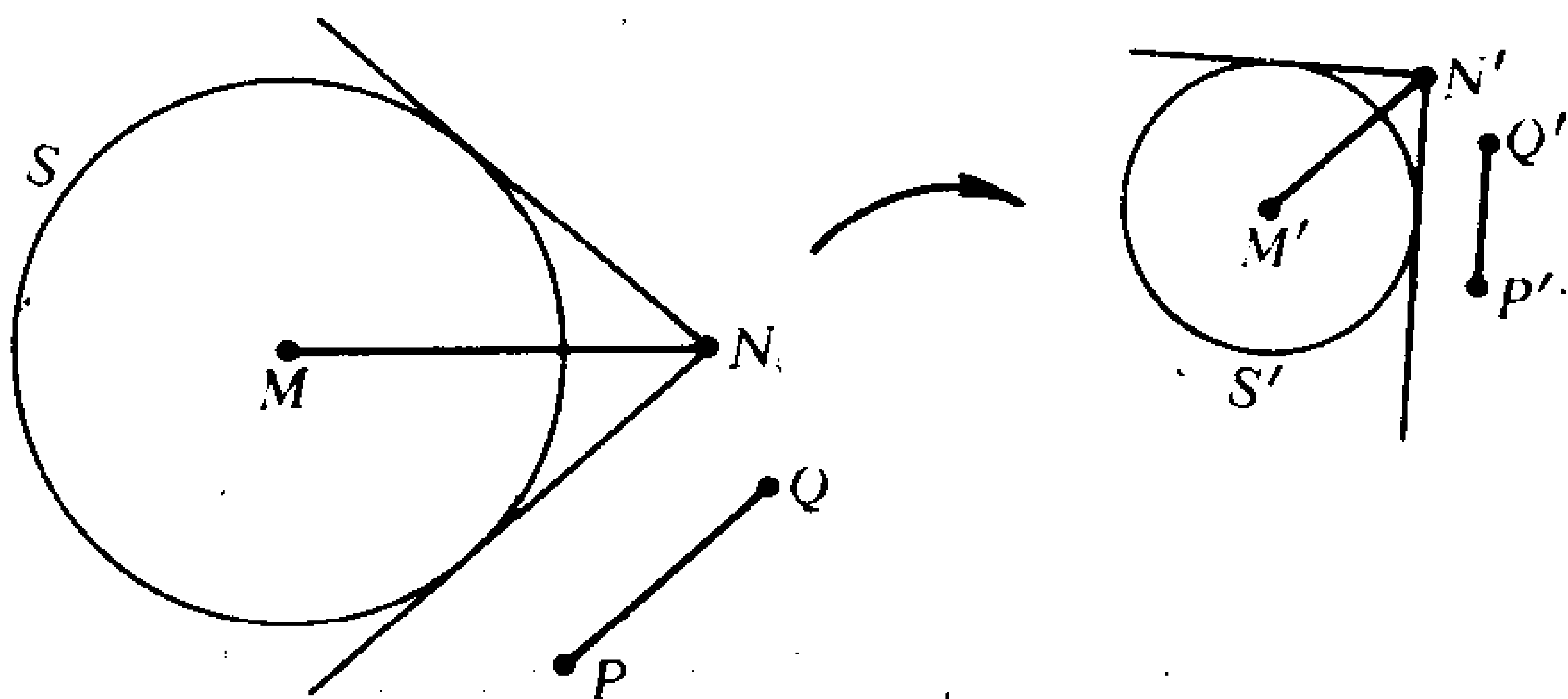


图 47

45. (a) 命 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 是任意两个正方形. 假设它们的周界有相同的走向，即当我们在两个正方形周界上按从 A 到 B 到 C 到 D 与从 A' 到 B' 到 C' 到 D' 的顺序走的时候，或

者都是顺时针方向，或者都是反时针方向. 证明线段 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 的中点或者张成一个正方形，或者它们全都重合.

如果两个正方形的周界走向相反，上面的结论是否仍然成立？

(b) 设 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 是两个等边三角形. 以线段 AA_1，BB_1，CC_1 为底边分别作新的等边三角形 AA_1A^*，BB_1B^*，CC_1C^*. 假设五个三角形 ABC，$A_1B_1C_1$，AA_1A^*，BB_1B^*，CC_1C^* 的周界都有相同走向（或者全是顺时针方向，或者全是反时针方向）. 证明三个点 A^*，B^*，C^* 或者是一个等边三角形的顶点，或者重合.

如果我们不要求这五个三角形的周界都有同一走向，结论是否仍然成立？

46. (a) 设 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 是两个正方形. 证明若这两个正方形的周界有相同的走向，则

$$AM^2+CP^2=BN^2+DQ^2.$$

如果用两个相似的长方形代替这两个正方形，结论是否仍然成立？如果不要求它们的周界走向相同，结论是否仍然成立？

(b) 设 $ABCDEF$ 与 $MNPQRS$ 是两个正六边形. 证明：如果它们的周界有相同的走向，则

$$AM^2+CP^2+ER^2=BN^2+DQ^2+FS^2.$$

47. (a) 作长方形，使它的边分别过四个给定的点 A，B，C，D，并且使它的对角线有给定的长度.

(b) 给定四边形 $ABCD$ 的各个角和对角线，求作这四边形.

(c) 设给定过同一点的四条直线，作平行四边形使它的边有给定的长度，并且它的顶点在四条给定的直线上.

48. (a) 在平面上给定一点 M 和两条直线 l_1和l_2，求作三角形 ABC，使得 M 分 AB 边成给定比：$BM/MA=k$，并且使得 l_1和l_2 分别是边 BC 和 CA 的中垂线.

(b) 在平面上给定两点 M 和 N 及一直线 l，求作三角形 ABC，使得 M 和 N 分别把边 AB 和 BC 分成给定比：$BM/MA=k_1$和$CN/NB=k_2$，并且使得 l 是边 AC 的中垂线.

第二章　保距变换和相似变换的进一步应用

1.　互相相似的图形系统

在这一节中，我们将考虑某些互相相似的图形系统，它们有一些有趣的性质. 首先考虑较为简单的全等图形系统.

设 F 和 F' 是平面上两个全等图形. 在第一册第二章 § 2 中，已经证明这样的图形可以通过一个旋转或平移使之重合，并且基于这一点，断言平面内的刚体运动只有旋转和平移①. 但是，在那里我们是不考虑图形在运动过程中所处的那些中间位置的. 我们只集中注意于图形初始的和最终的位置. 而现在我们对一个运动的图形的中间位置也感兴趣. 这些位置构成了一个互相全等的图形系统②. 对应于把一个图形从位置 F 移动到位置 F' 的各种可能的方式，有无限多个这种不同的系统. 我们只考虑这类系统的某些简单的例子.

让图形 F 绕点 O 旋转，也就是让图形 F 运动，使得其中的某个点 O 保持不动〔图 48 (a)〕. 这时 F 的每个点 A 描出一

① 在这里和以后，“全等图形”这个词总是指“正向全等图形”（见第一册第 55 页）. 两个反向全等图形通常不能通过平面内的刚体运动使之重合.

② 我们仅对运动的图形的不同位置的集合感兴趣，而不管运动过程本身. 这样，我们将完全不考虑各个点的速度或加速度. 虽然力学上的考虑常常能简化几何定理的证明，但是在这里我们不去考虑这种特殊的几何学（所谓运动几何学）.〔请注意，这一节中的基本定理 1 和 2 也可以用力学的方法证明.〕

个以 O 为中心的圆（因为距离 OA 保持不变）. F 的每条直线 l 或者总与某个以 O 为中心的固定的圆相切，或者总经过 O（因为 O 到 l 的距离保持不变）. 点 O 是这个图形的任何两个位置的旋转中心.

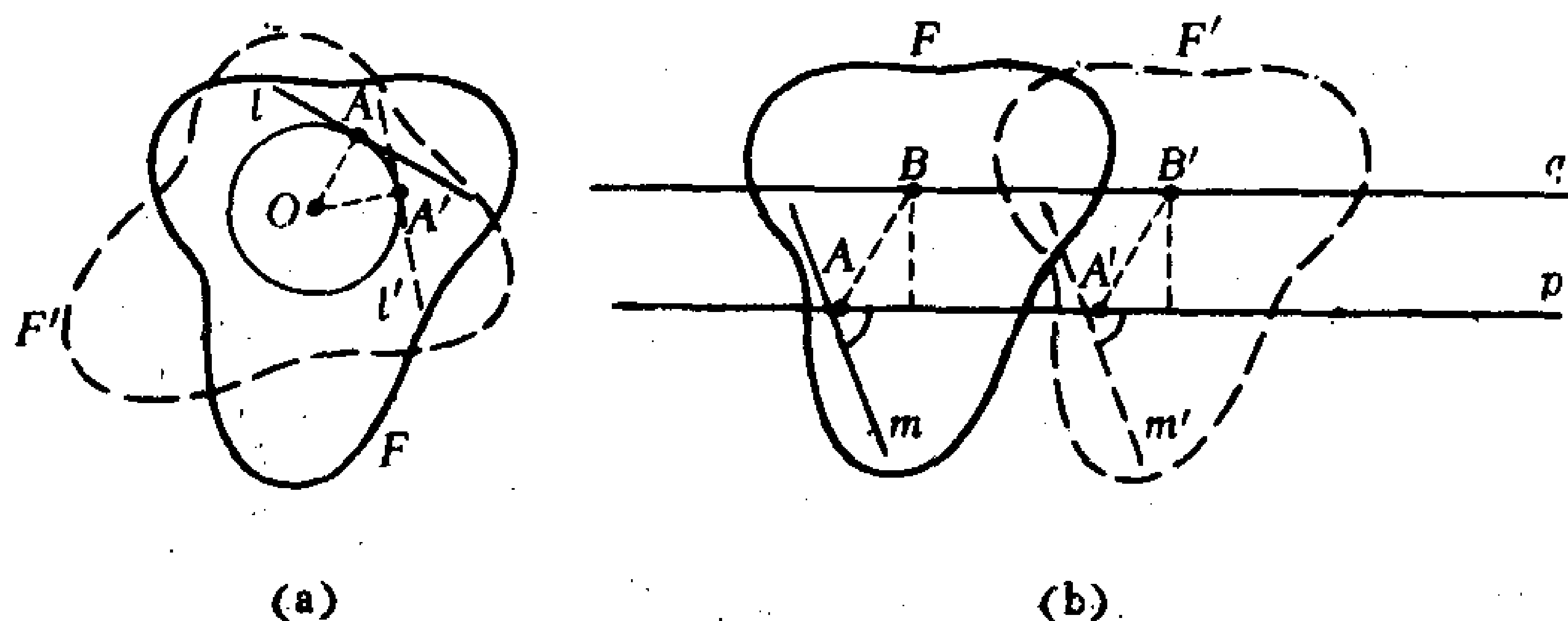


图 48

现在我们来考虑图形沿某给定直线 p 的方向的平移〔图 48(b)〕，也就是让图形运动，使得其中某直线 p 保持不动（实际上是沿直线自身的一个滑动）. 这时图形的每个点 B 描出一条平行于 p 的直线（因为从 B 到 p 的距离保持不变）. 每条不平行于 p 的直线 m 总是以保持平行于其初始位置的方式运动（因为 m 和 p 之间的夹角不变）. 每条平行于 p 的直线 q 沿自身滑动（因为它与 p 之间的距离不变）. F 的任何两个位置可以彼此通过一个沿 p 的方向的平移而得到.

如果在平面上移动图形 F，使得在整个运动过程中 F 有两条平行直线 p 和 q 总是经过平面上两个给定的点 A 和 B，那么直线 p 的运动是沿自身滑动（因为 p 与线段 AB 之间的夹角不变：这个角的正弦等于 p 和 q 之间的距离与线段 AB 的长

度之比)①. 因此我们所讨论的图形 F 的这种运动正是上面已经考虑过的图形的平移〔见图 48 (b)〕. 如果在运动过程中图形 F 有两条不平行直线总是经过给定的两个点，情况就比较复杂. 这种运动可以通过如下的方式实现：在平面上钉好两个钉子，再把一个角粘在图形上，然后移动这个角，使得它的两条边总保持与钉子相接触. 我们有下面的定理：

定理 1 若图形 F 在平面上运动，使得 F 的两条给定的不平行直线 p 和 q 总是分别过平面上两个给定的点 A 和 B，则 F 的每条其它的直线或者总经过平面上某个给定的点，或者总与平面上某个圆相切.

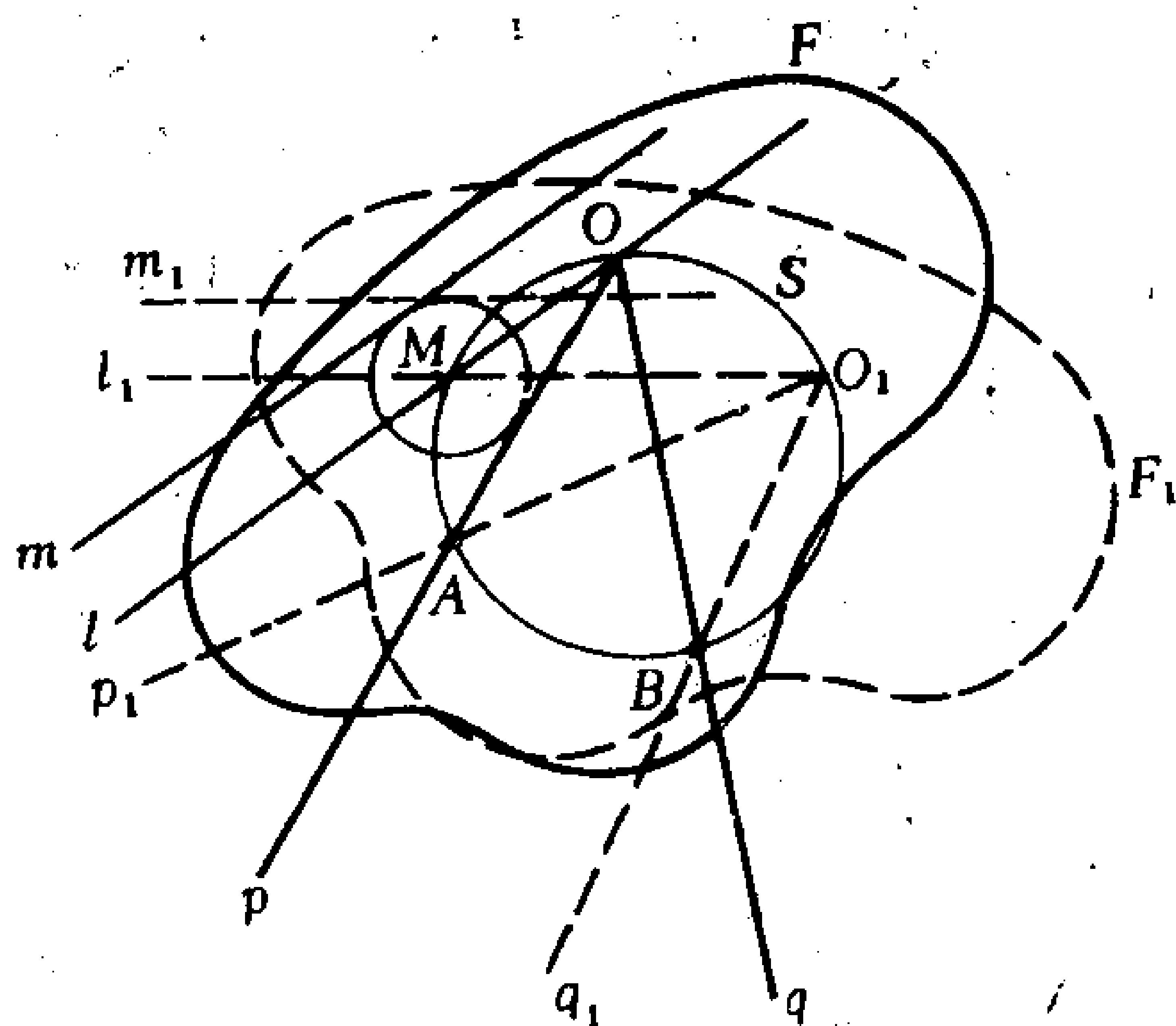


图 49(a)

证明 设 F_1 是 F 在运动过程中的另一个位置，直线 p_1 和 q_1 分别是直线 p 和 q 在 F_1 中的对应位置. 命 O 是 p 与 q 的交点，O_1 是 p_1 和 q_1 的交点〔图 49(a)〕. 点 O 和 O_1 必落在某个圆 S 的某段弧上，这段弧张在弦 AB 上，并且它所含的圆周角

---

① 在这里我们想象图形 F 和直线 p, q 在平面上作滑动，而在平面上的点，例如 A 和 B，则是不动的 .

等于直线 p 和 q 的夹角. 设 l 是 F 的过 O 的某直线，l_1 是 l 在 F_1 中的对应位置，命 M 和 M_1 分别是 l 和 l_1 与圆周 S 的交点. 因为 $\angle MOA = \angle M_1O_1A$（直线 l 与 p 之间的夹角不变），由此可知 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AM_1}$，从而 $M_1 = M$. 这样，我们证明了直线 l 的所有位置都过同一点 M.

现在设 m 是 F 的不经过点 O 的任意一条直线. 过 O 引直线 l 平行于 m. 如我们已经看到的，直线 l 的所有位置都过同一点 M. 因为直线 m 与 l 之间的距离保持不变，所以直线 m 的所有可能的位置必定与以 M 为中心，半径等于 l 到 m 的距离的圆相切. 这就完成了定理的证明.

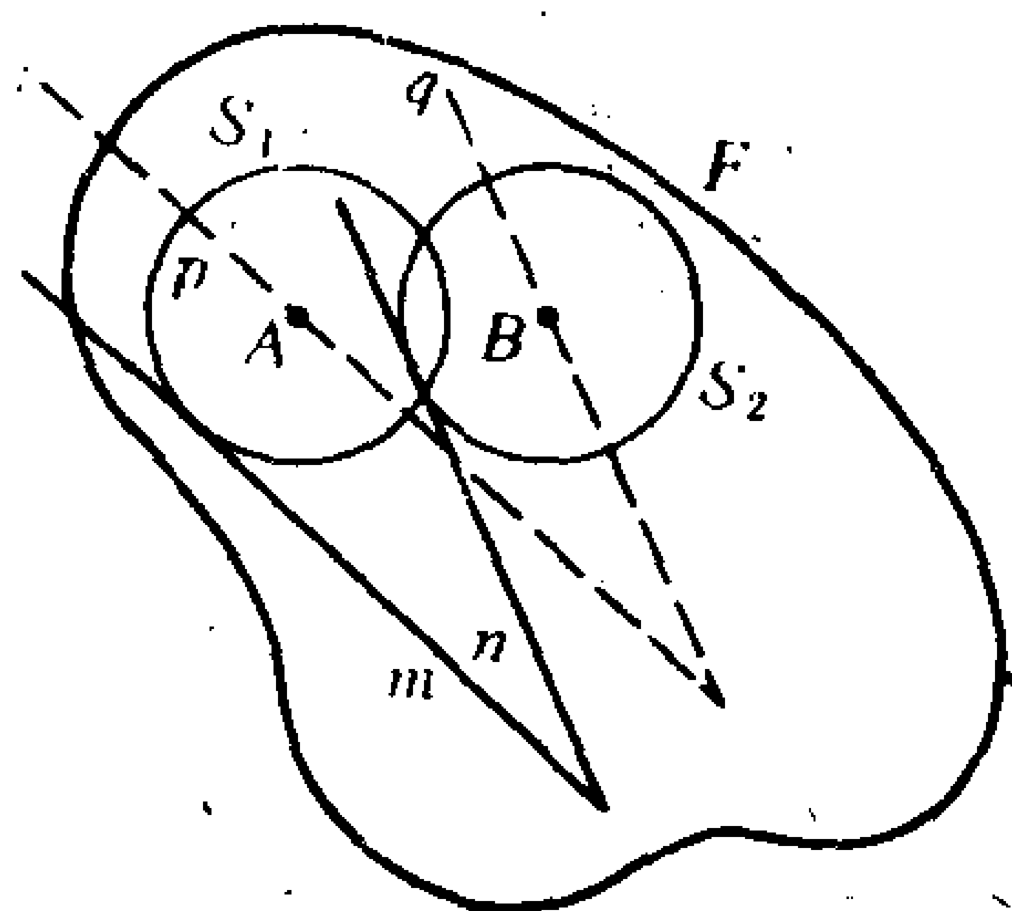


图 49(b)

现在设图形 F 在平面上移动，使得图形中的两条不平行直线 m 和 n 总是分别与两个给定的圆 S_1 和 S_2 相切〔图 49(b)〕. 过圆 S_1 和 S_2 的中心 A 和 B 分别引直线 p 和 q，使它们分别平行于 m 和 n. m 和 p 之间的距离等于 S_1 的半径. 因为在图形运动过程中这距离是不变的，所以直线 p 始终都过点 A. 类似地，直线 q 始终都过点 B. 因此可以应用定理 1. 于是，我们知道，在这样的运动中，图形 F 的每条直线也是或者总是与某固定的圆相切，或者总过某个给定的点.

如果图形 F 在平面上移动，使得图形中的某两个点 A 和 B 描出两条平行直线 p 和 q，则线段 AB 的所有位置彼此平行(因为 AB 与 p 的夹角的正弦不变：它等于 p 和 q 之间的距离

与线段 AB 的长度之比). 因此图形的任何两个位置可以彼此经过一个沿直线 p 的方向的平移得到. 即图形 F 的运动是平移，对于它我们在前面已研究过了〔见图 48(b)〕. 如果图形 F 运动，使得 F 的某线段 AB 的两个端点分别保持在两条不平行的直线上，情况就比较复杂. 我们有下面的定理：

定理 2 若图形 F 在平面上以这样的方式移动，使得它的两个点 A 和 B 描出相交于点 O 的直线 p 和 q，则存在一个与图形 F 相伴的圆 S，S 上每个点的轨迹都是过 O 的直线.

证明 设 F_1 是 F 在运动过程中的另一个位置，A_1B_1 是 F 的线段 AB 在 F_1 中的对应位置 (图 50). 过点 A, B, O 作圆 S. 我们将把这个圆看作与图形 F 相伴的圆，并且用 S_1 表示当 F 到达 F_1 时这个圆所在的位置. 显然，S_1 也经过 O 点 (因为圆 S 的弧 AB 等于圆 S_1 的弧 A_1B_1，它们都等于 $2\angle AOB$). 设 M 是 S 上的任意一点，M_1 是 M 在 S_1 中的对应点. 从 F 与 F_1 全等可知弧 AM 与弧 A_1M_1 相等，这意味着这些弧所对的圆周角 $\angle AOM$ 和 $\angle A_1OM_1$ 也相等. 这就是说直线 OM_1 与 OM 重合. 从而证明了圆周 S 上的每个点 M 都沿着过 O 的直线移动.

还可以看出，S 的中心 N 沿着一个以 O 为中心的圆移动，这个圆的半径等于圆 S 的半径 R. 这是因为 S 的所有位置都经过点 O，因而距离 ON 始终等于 R.

49. 求作三角形，使与给定的三角形全等，并且它的边

(a) 过三个给定的点；

(b) 与三个给定的圆相切.

这个问题已出现在第一册第一章 §1 中〔见问题 7(b)〕.

50. (a) 设一个直角三角形的斜边以这样的方式滑动，使得它的两个端点保持在两条垂直的直线上，求直角的顶点所

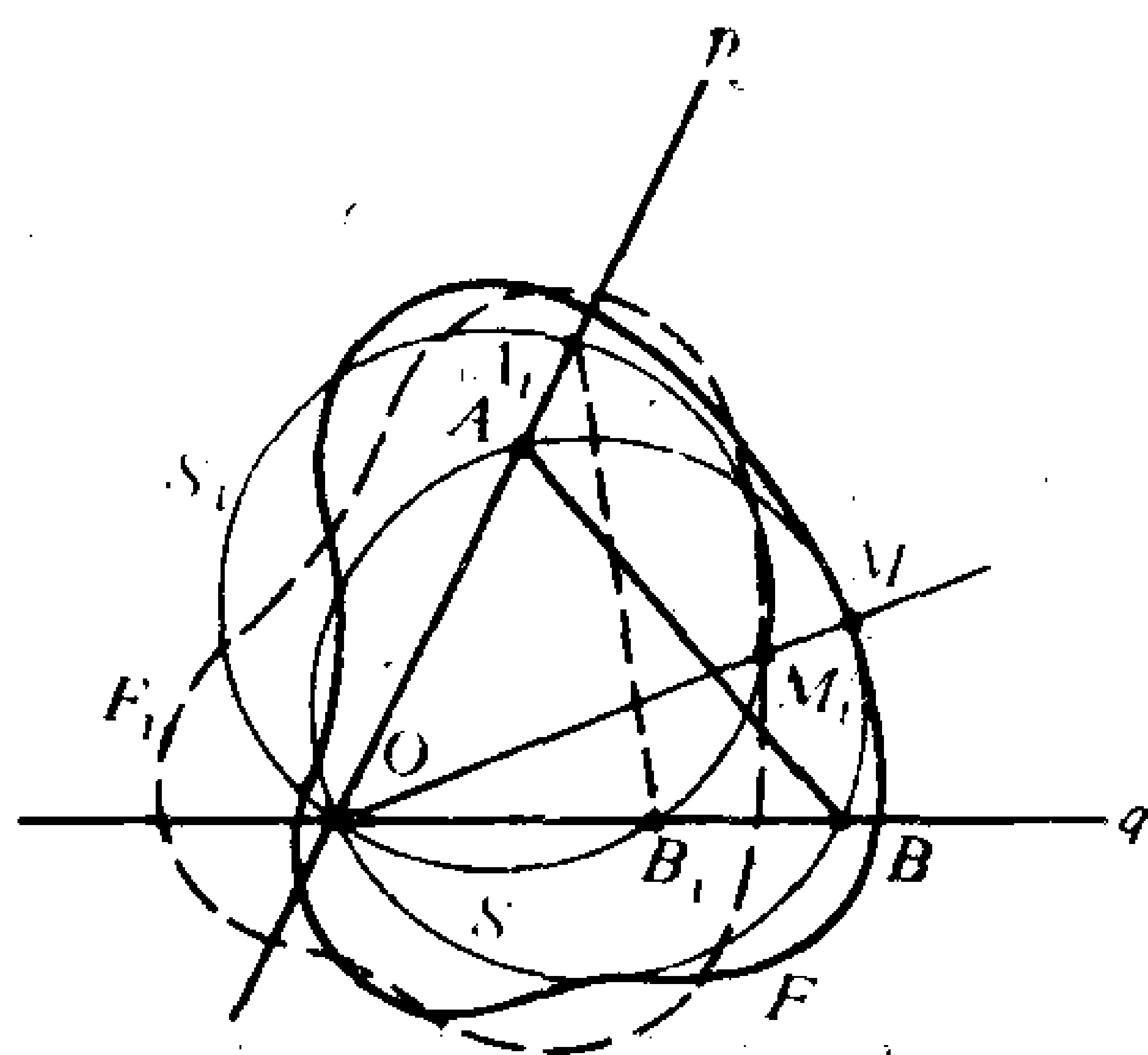


图 50

描出的轨迹.

(b) 设顶角为120°的等腰三角形以这样的方式滑动，使得它的最长边的端点保持在一个60°角的两条边上，求这三角形的最大角的顶点的轨迹.

51. 在平面上给定两条互相垂直的直线 l_1和l_2 以及圆 S. 求作直角三角形 ABC，使得它的一个锐角为已知角 α，它的顶点 A 和 B 分别在 l_1和l_2 上，并且直角的顶点 C 在圆 S 上.

现在设 F 和 F' 是平面上两个相似图形①. 从第一章 § 2 中我们知道 F 可以经过一个螺旋相似变成 F'. 但是那时我们并不考虑从位置 F 变动到位置 F' 时图形所处的那些中间位置. 现在我们将考虑当图形以始终保持相似于初始位置的方式，从某个位置 F 变动到另一个位置 F' 时，由它的所有位置所构成的互相相似的图形系统.

首先假设 F 以这样的方式变动，使得 F 总是相似于它的初始位置，并且除此之外还使得图形的某个点 O 保持不动. 如果与此同时还有图形的另外某个点 A 描出一个以 O 为中心的圆，则 O 与 A 之间的距离不变. 因而 F 总是全等于（不仅是相似）它的初始位置，并且 F 的所有点都描出以 O 为中心

① 从此以后，"相似"这个词总是指"正向相似"（见第 54 页）.

的圆〔见图 48(a)〕. 若 F 的某个点 A 描出一条过 O 的直线，则 F 的每个其它的点 B 也描出一条过 O 的直线（因为当 F 保持与初始位置相似时，$\angle BOA$ 不能改变）. 图形的这样一种运动意味着总可以通过一个相似中心在 O 的中心相似把图形变回到原来的位置〔图 51 (a)〕. 现在假设 F 的点 A 描出一条任意的曲线 γ，我们将证明 F 的每个其它的点 B（除点 O 外）也描出一条相似于 γ 的曲线〔图 51(b)〕. 事实上，设 F 是初始位

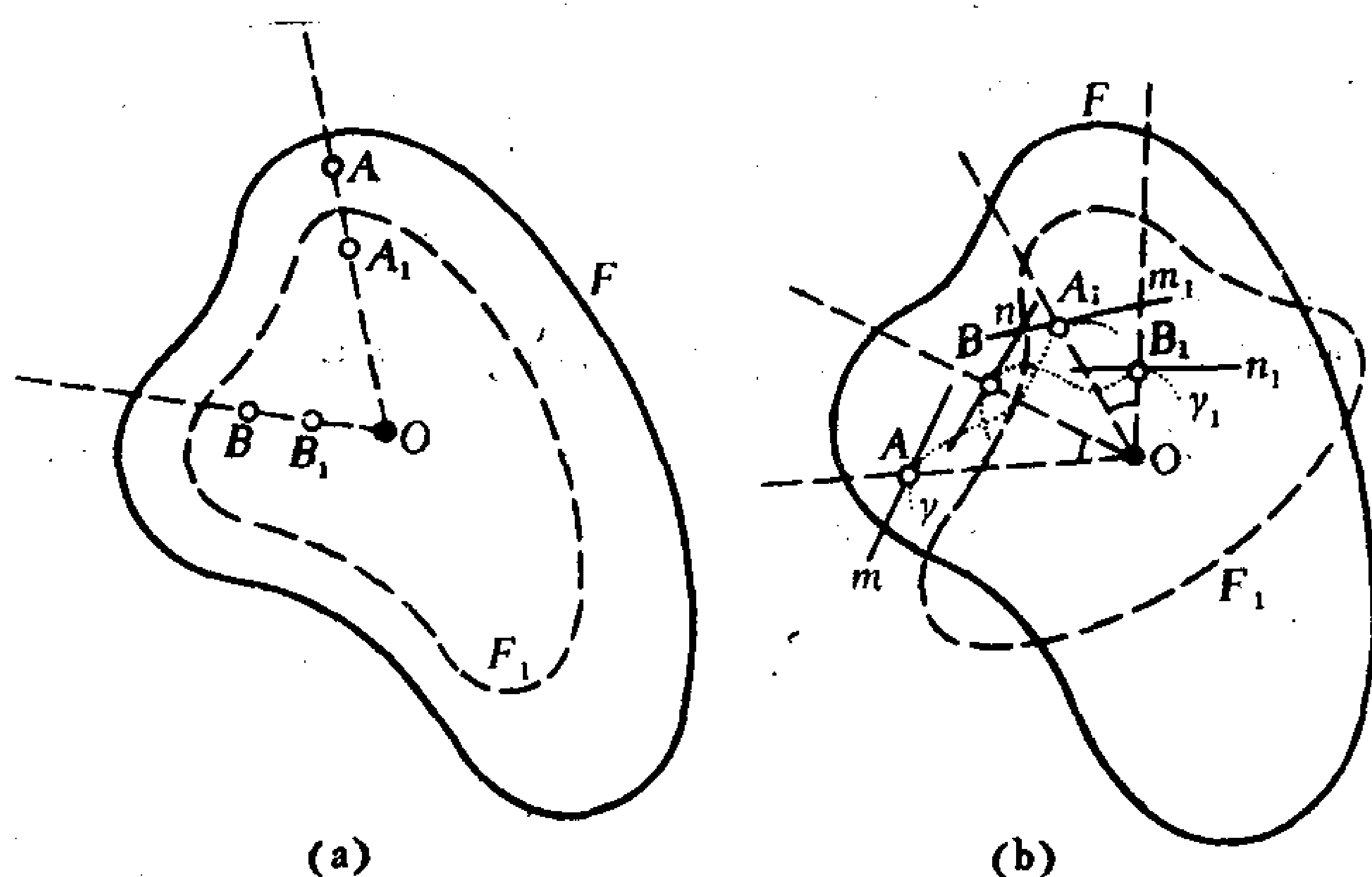


图 51

置，F_1 是 F 的任意一个别的位置. 设 A_1, B_1 是 A, B 在 F_1 中的对应点. 因为图形的所有位置都相似于初始位置，并且点 O 保持不动，可见$\triangle OAB$ 和$\triangle OA_1B_1$ 是相似的. 因而 $\angle B_1OA_1 = \angle BOA$，并且 $OB_1/OA_1 = OB/OA$. 用 α 表示$\angle BOA$，k 表示比 OB/OA. 上面的等式说明通过一个中心为 O，相似系数为 k，转角为 α 的螺旋相似可以把 B_1 变到 A_1. 因为 F_1 是图形 F 的任意

一个位置，这意味着我们的螺旋相似把 B 所描出的整条曲线 γ' 变成点 A 描出的曲线 γ. 但是如果两条曲线可以通过一个螺旋相似彼此互变，则它们是相似的，这就是要证明的.

用同样的方法可以证明，若图形 F 变动，使得 F 的一条不过 O 的直线 m 在每个时刻都保持与某曲线 γ 相切，则这图形的任意一条别的直线 n（不经过 O）也在每个时刻都与一条相似于 γ 的曲线相切〔图 51 (b)〕. 这条曲线可由 γ 经过一个以 O 为中心，把 m 变成 n 的螺旋相似得到. 特别地，若图形 F 变动，使得它的一条不过 O 的直线 m 总过某个给定点 M，则这图形的任意一条别的直线 n（不经过 O）也总过某个固定点（这个点对不同的直线可能是不同的）.

我们还应注意，若图形 F 变动，使得它的某个点 O 保持不动，则 O 是这图形的任何两个位置的旋转中心. 事实上，由 $\triangle AOB$ 与 $\triangle A_1OB_1$ 相似〔图 51(b)〕，可见 $\triangle AOA_1$ 和 $\triangle BOB_1$ 也相似（因为 $\angle AOA_1 = \angle AOB + \angle BOA_1$, $\angle BOB_1 = \angle A_1OB_1 + \angle BOA_1$，所以 $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$. 而且由 $OB_1/OA_1 = OB/OA$. 有 $OA_1/OA = OB_1/OB$）. 但是这意味着图形 F_1 可由 F 经过一个中心在 O，转角为 $\angle A_1OA$，相似系数为 OA_1/OA 的螺旋相似得到.

反之，若变动 F 使得它总保持相似于它的初始位置，并且使得 F 的任何两个位置有相同的旋转中心 O，则把点 O 看作 F 的点，它是不动的（因为旋转中心在中心相似变换下是不动点）.

52. 设 A 是两个圆 S_1和S_2 的一个交点. 过 A 引任意一条直线 l 和一条固定的直线 l_0，它们分别与 S_1和S_2 再次相交于点 M_1, M_2和N_1, N_2. 设 M_1M_2P 是作在线段 M_1M_2 上的等边三

角形，并设 Q 是直线 M_1N_1 和 M_2N_2 的交点（图 52）. 证明当直线 l 绕 A 旋转时，

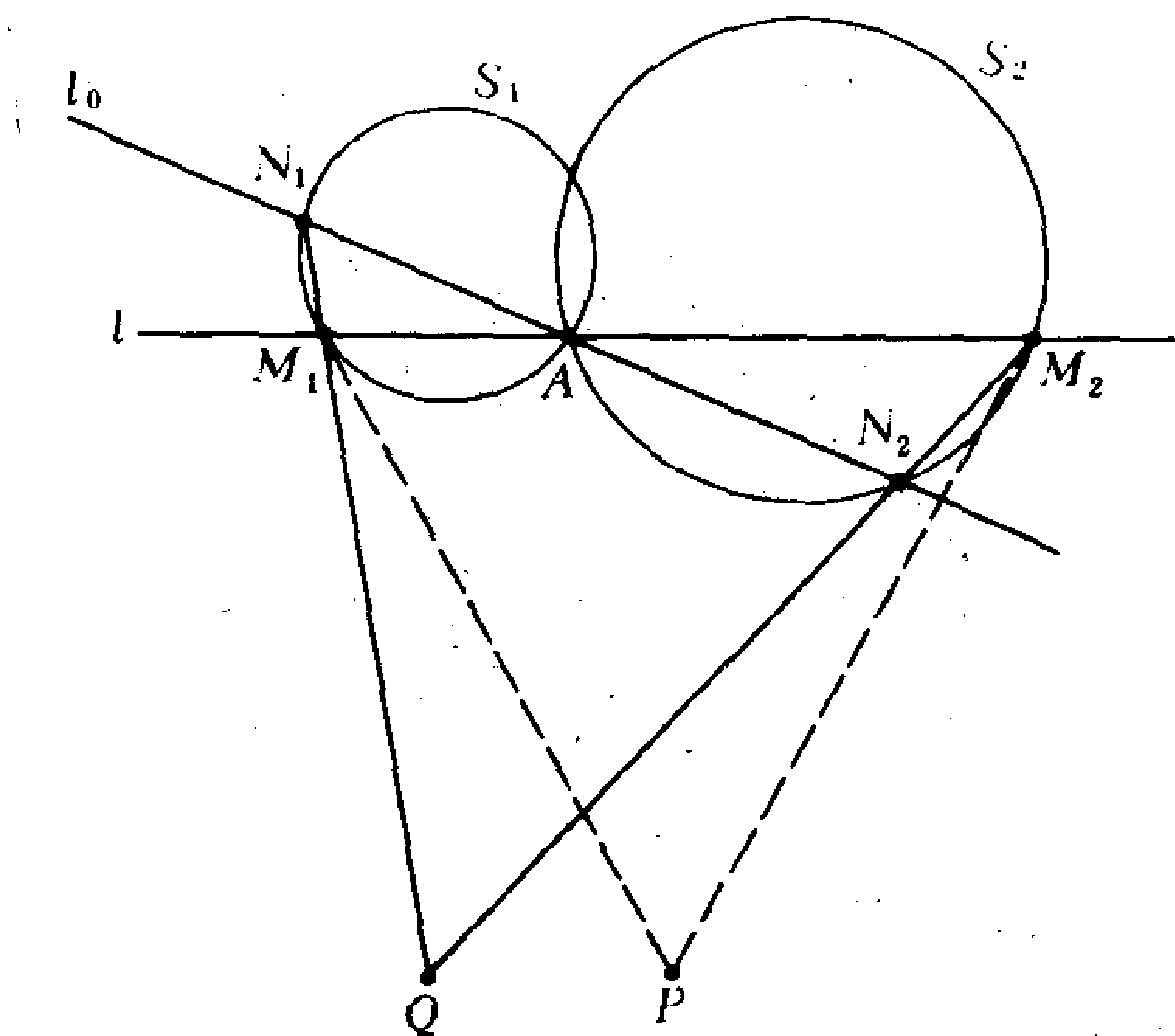


图 52

(a) $\triangle M_1M_2P$ 的顶点 P 描出一个圆 Σ，并且 M_1P 和 M_2P 分别绕某两个固定点 I_1 和 I_2 转动（其中 M_1P 过 I_1，M_2P 过 I_2）；

(b) Q 描出一个圆 Γ. 变动给定直线 l_0 的位置，求圆 Γ 的中心描出的轨迹.

53. 设 l 是过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，并且与它的底边 BC 交于点 M 的任意一条直线. 命 O_1 和 O_2 分别是 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 的外接圆圆心. 变动直线 l，使它经过所有可能的位置，求线段 O_1O_2 的中点所描出的轨迹.

54. 给定三角形 ABC 和一个点 O. 过 O 引三条直线 l_1, l_2, l_3，使得它们之间的夹角分别等于 $\triangle ABC$ 的各个角（角的方向考虑在内）. 设 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 是这三条直线与 $\triangle ABC$ 相应的边的交点（图 53）.

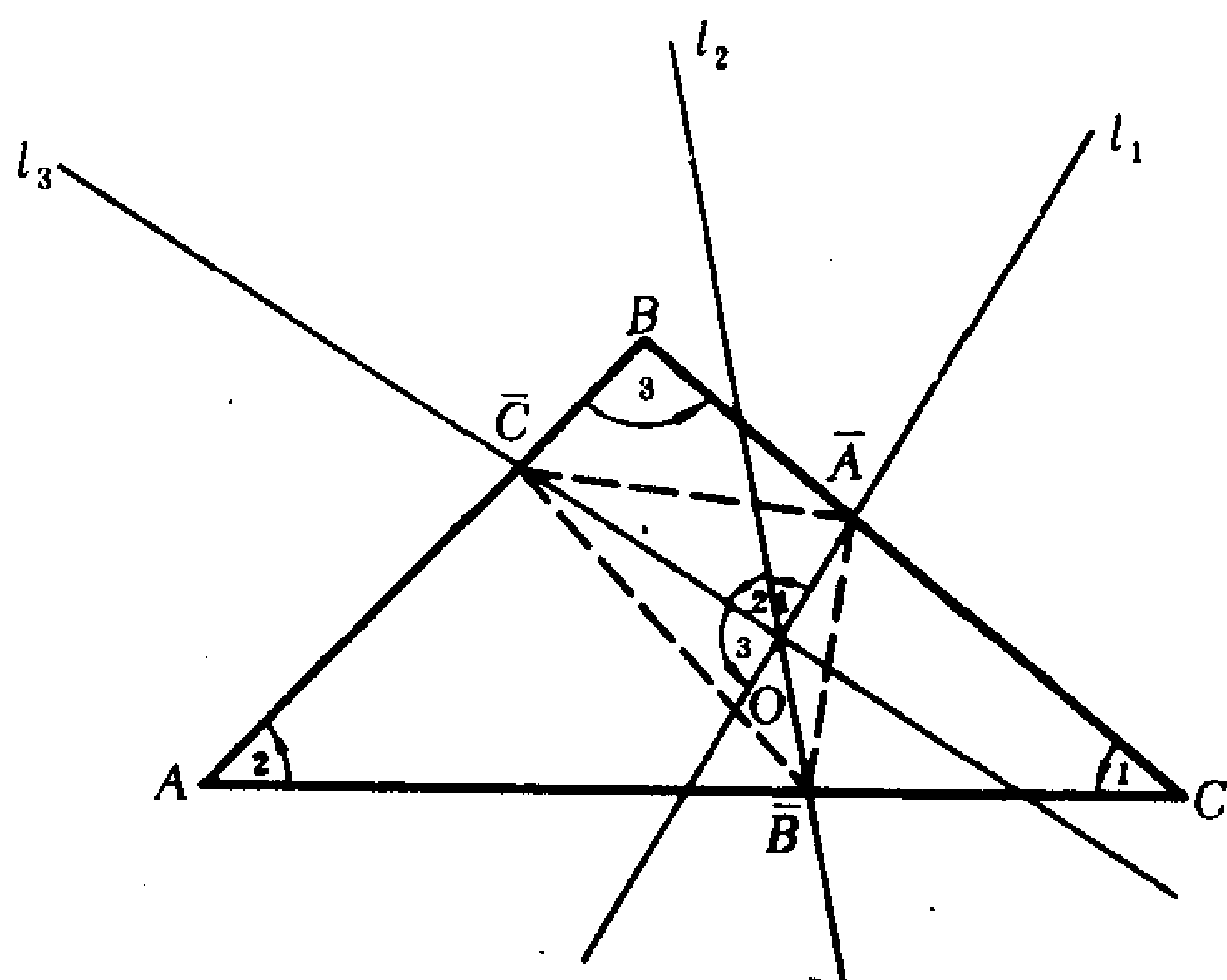


图 53

(a) 证明若 O 分别是$\triangle ABC$ 的

1° 外接圆心；

2° 内切圆心；

3° 高的交点(垂心)，

则相应地 O 是$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的

1° 垂心；

2° 外接圆心；

3° 内切圆心.

(b) 设点 O 任意，让直线 l_1,l_2,l_3 绕 O 旋转. 分别找出$\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的

1° 外接圆心；

2° 内切圆心；

3° 垂心

的轨迹.

现在我们回到本节要证的一些主要定理.

定理 3 若图形 F 以这样的方式变动，使得它的所有的位置都相似于初始位置，并且使得图形 F 的某三个点 A, B, C 描出不经过同一点的三条直线，则图形的每个点都描出一条直线.

定理 4 若图形 F 以这样的方式变动，使得它的所有的位置都相似于初始位置，并且使得 F 的不过同一点的三条直线 l, m, n 总过三个给定的点，则 F 的每条直线总过某个固定点，并且 F 的每个点都描出一个圆.

定理 3 的证明 我们将证明 F 的任何两个位置有同一个旋转中心 O（即当 F 变动时，F 的某个点 O 保持不动）. 由此推得，F 的所有点描出的曲线都相似于点 A 所描出的曲线，即直线. 而这就是我们要证明的.

用字母 P, Q, R 表示点 A, B, C 分别沿着它们运动的那些直线的交点〔图 54 (a)〕①. 设 F 和 F_1 是图形 F 的两个位置；A_1, B_1, C_1 是 A, B, C 在 F_1 中的对应位置. 图形 F 和 F_1 的旋转中心 O 也是线段 AB 和 A_1B_1，AC 和 A_1C_1 的旋转中心. 但是如前面（见图 31）所证明的，线段 AB 和

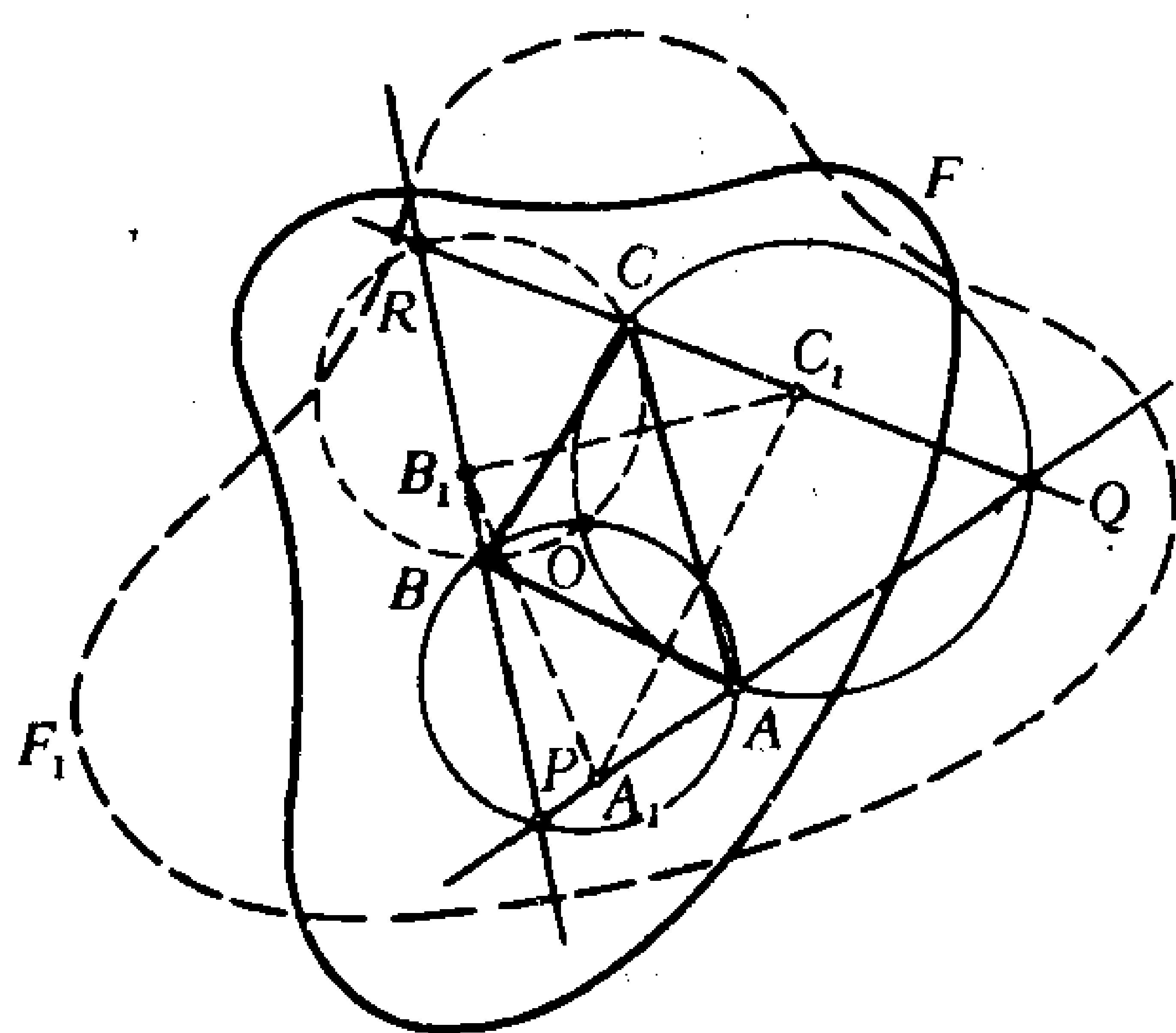


图 54(a)

① 我们假设三条直线中没有两条是平行的. 例外的情形，即其中两条直线或所有三条直线都平行的情形的分析留给读者.

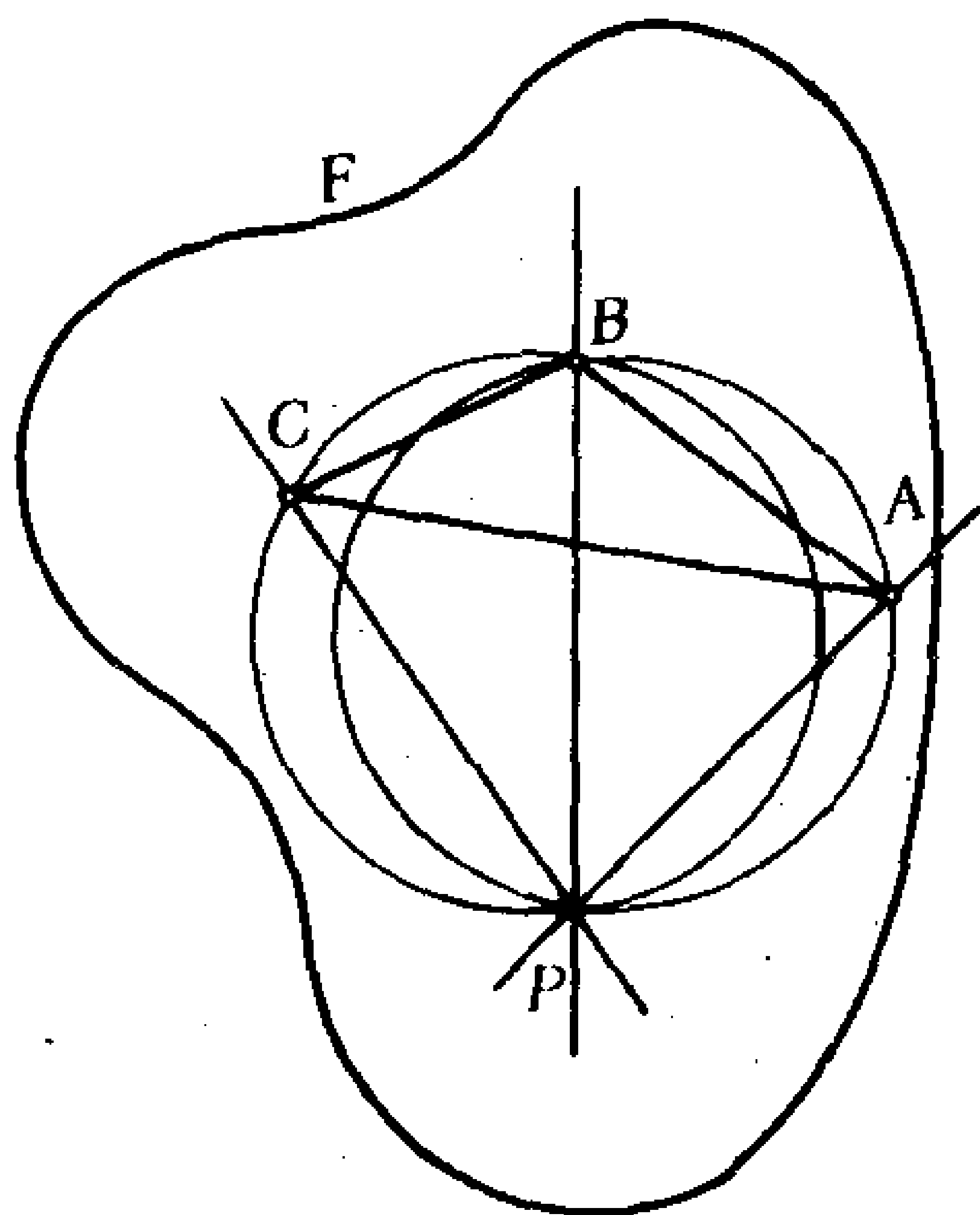


图 54(b)

$A'B'$ 的旋转中心落在 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle A'B'Q$ 的外接圆上，其中 Q 是 AA' 与 BB' 的交点．在现在的情形下，这意味着 O 必定在三角形 ABP 的外接圆（和$\triangle A_1B_1P$ 的外接圆）上．同理，线段 AC 和 A_1C_1 的旋转中心在$\triangle ACQ$ 的外接圆（和三角形 A_1C_1Q 的外接圆）上．于是图形 F 和 F_1 的旋转中心可以作为$\triangle ABP$ 和$\triangle ACQ$ 的外接圆的一个交点被确定出来，因而不依赖于图形的特别位置 F_1．这就是说图形 F 的任何两个位置有相同的旋转中心，定理证完．

如果由点 A,B,C 描出的直线过同一点 P〔图 54(b)〕，定理的断言一般说来仍成立．它的证明与上面所说的没有什么不同．所有位置的公共相似中心首先必须与圆 ABP 和 BCP 的交点（即 P 点）重合（其中 A,B,C 是我们所考虑的图形 F 的三个点在某个时刻的位置）．仅有的例外情形出现在圆 ABP 与 BCP 重合（即点 A,B,C 与点 P 共同落在一圆上）的时候，也就是说，当

$$\angle APB+\angle ACB=180°,$$

并且点 P 和 C 位于直线 AB 的两侧，或者$\angle APB=\angle ACB$，并且点 P 和 C 位于 AB 边的同一侧的时候．对这种情形，定理不一定成立．

定理 4 的证明　我们将证明 F 的任何两个位置有相同

的旋转中心 O，并且 F 的某个点 A 描出一个圆. 然后由 51 题后面我们所作的说明可知，F 的每条直线总过某个固定点（因为直线 l 过固定点），并且 F 的每个点描出一个圆（因为 A 描出一个圆）.

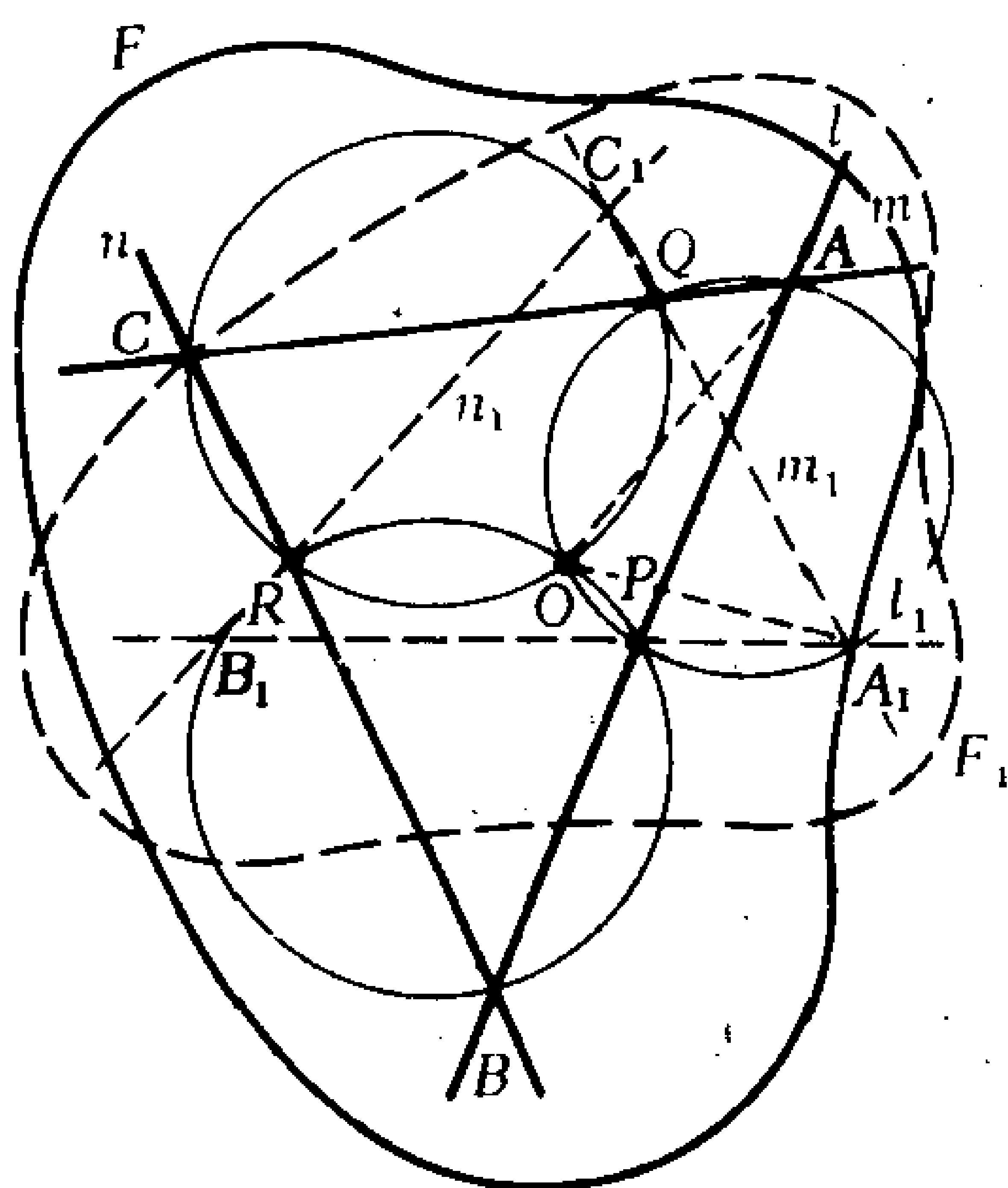


图 55

我们用 A，B，C 表示直线 l，m，n 的交点①，用 P,Q,R 表示这三条直线所经过的给定点(图 55).

首先，由于在 F 的变动过程中$\angle QAP$ 的大小必定保持不变，显然 A 描出一个圆(因为 F 保持相似于它的初始位置，图形中直线 l 和 m 的夹角不能改变)②. 其次，设 F 与 F_1 是图形 F 的两个位置. l_1,m_1,n_1 是 l，m，n 在 F_1 中的对应位置. 命 A_1,B_1,C_1 是点 A，B，C 在 F_1 中的对应位置. 若 O 是 F 与 F_1 的旋转中心，则 $\angle AOA_1$ 等于把 F 变成 F_1 的螺旋相似的转角，因而等于 l 与 l_1 的夹角或 m 与 m_1 的夹角. 于是 $\angle AOA_1=\angle APA_1=\angle AQA_1$，即 O 在过 A，A_1，P，Q 的圆上. 同理，我们可以证明 O 在过 B，B_1，P，R 的圆上. 由此可见，F 与 F_1 的旋转中心 O 是$\triangle APQ$ 和$\triangle BPR$ 的外接圆的交点，所以它不依赖于变动的图形 F 的特殊位置 F_1. 这就是说 F 的任何两个位置

① 见第 79 页上的注.

② 这个推理中，事先假定直线 l 的点 A 在变动过程中不越过给定点 P（或给定点 Q）；在相反的情形，把$\angle QAP$ 换成它的补角.

有相同的旋转中心.

若 F 的直线 l, m, n 都过同一点 A，则定理 4 的断言不一定成立.

55. 作四边形 $ABCD$，使它相似于给定的四边形(例如正方形)，并且使它适合下列条件之一，

(a) 它的顶点分别在四条给定的直线上；

(b) 它的边分别过四个给定的点；

(c) 它的边 BC，CD 与对角线 BD 分别过三个给定的点，而顶点 A 在给定的圆上.

问题 55 的(a)和(b)也可表述如下：

(a) 在给定四边形中作内接四边形，使它相似于另一个给定的四边形(例如正方形).

(b) 作给定四边形的外接四边形，使它相似于另一个给定的四边形(例如正方形).

56. 设给定四条直线 l_1, l_2, l_3, l_4. 作直线 l 使得由四条给定直线在它上面截出的三个线段成给定的比.

57. 把$\triangle ABC$ 的每条边绕各自的中点转定角 α (每次都按同一方向旋转). 设 $A'B'C'$ 是由旋转后的直线构成的新三角形. 变动 α 角使它取各种不同的值，分别找出 $\triangle A'B'C'$ 的中线交点，高的交点以及角平分线的交点的轨迹. 证明所有这些三角形的外接圆圆心重合.

58. 设 M, K, L 是$\triangle ABC$ 的边 AB, BC, AC 上的三个点. 证明

(a) $\triangle LMA$，$\triangle MKB$，$\triangle KLC$ 的外接圆 S_1, S_2, S_3 交于一点；

(b) 以圆 S_1, S_2, S_3 的中心为顶点的三角形相似于

$\triangle ABC$.

问题 58 (a) 中的命题可以进一步推广，见第三册第二章 §1 中问题 218 (b). 类似地，问题 58 (b) 也可以推广，但我们不赘述了.

59. 设在圆 S 中内接了两个正向全等的三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ (见第一册第 55 页). 命 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 是它们的对应边的交点 (图 56). 证明

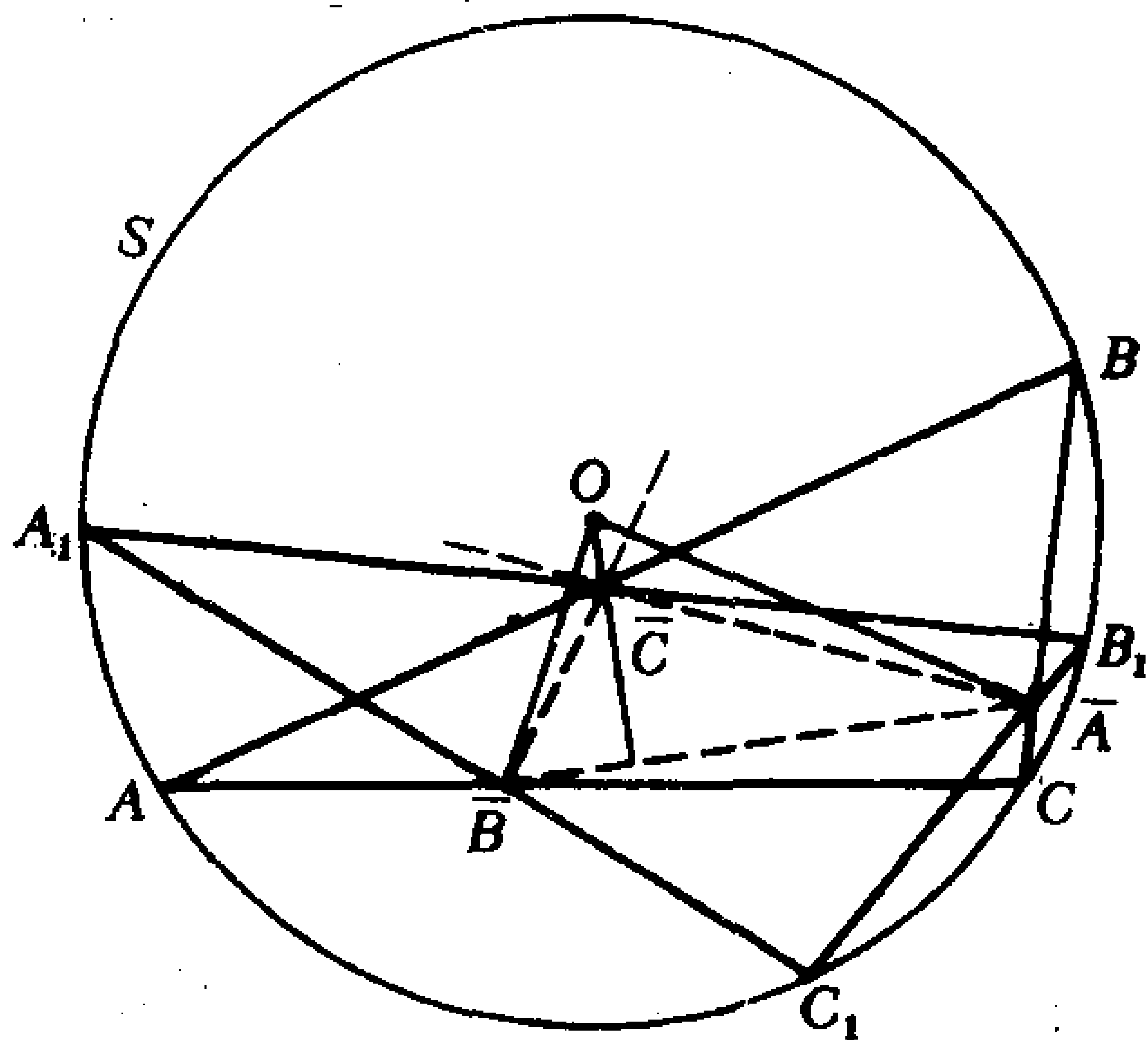


图 56

(a) $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 相似于$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$；

(b) $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的高的交点与圆 S 的中心重合.

60. 设 l 是平面上任意一条直线，直线 l_1,l_2,l_3 分别关于给定的三角形 ABC(不是直角三角形！)的三条边与 l 对称，设 T 是由直线 l_1,l_2,l_3 构成的三角形. 证明

(a) 对应于直线 l 的各种不同位置，所得到的三角形 T 都彼此相似；

(b) 所有使得 l_1,l_2,l_3, 交于一点 P 的直线 l 都过$\triangle ABC$ 的高的交点 H；l_1,l_2,l_3 的交点 P 的轨迹是$\triangle ABC$ 的外接圆；

(c) 所有使得三角形 T 有给定面积的直线 l 都与同一个以 H 为中心的圆相切.

61. 证明从点 P 向 $\triangle ABC$ 的三条边所作的垂线的垂足在一直线上（西姆松线，图 57），当且仅当 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

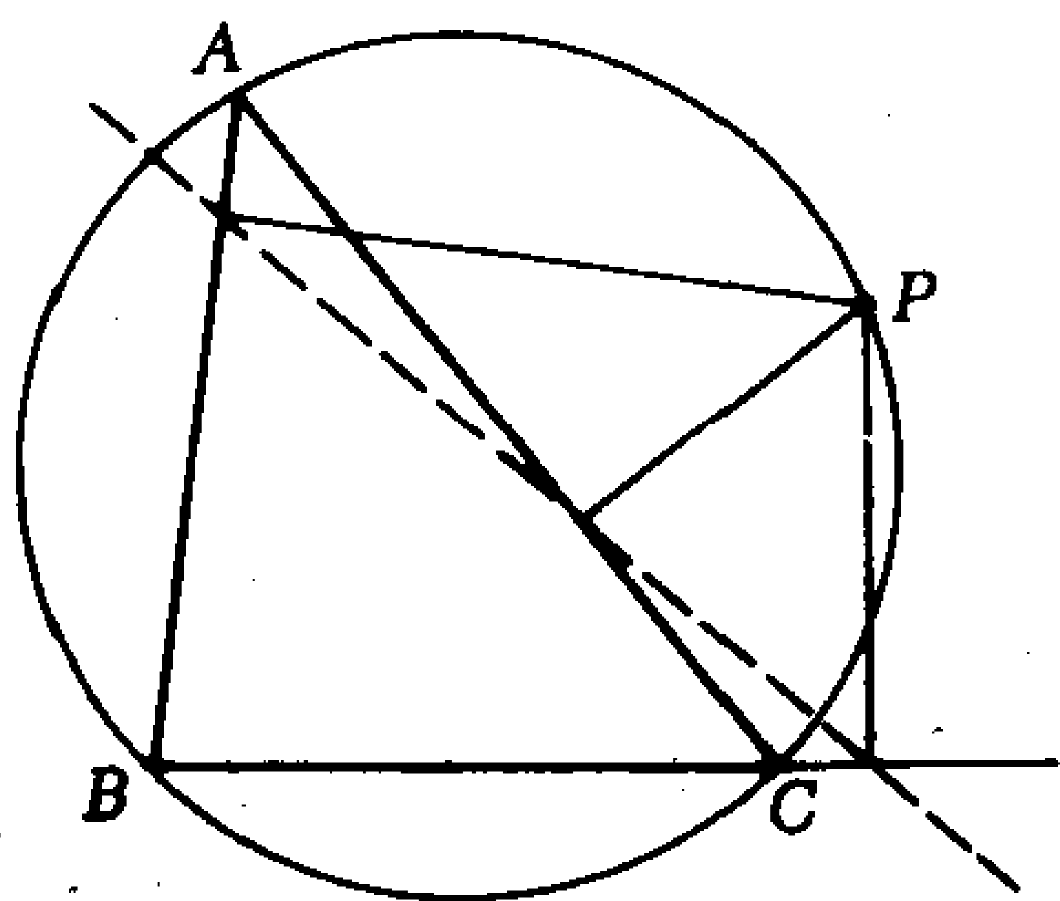


图 57

62. 从问题 61 的结果导出以下定理的证明：

(a) 由平面上任意四条直线（其中任意三条都不交于一点，并且任何两条都不平行）确定的四个三角形的外接圆过同一点.

(b) 设给定圆 S 和它的三条弦 MA, MB, MC，以这些弦为直径作三个圆. 这三个圆中的任何两个都有除 M 点之外的另外一个交点. 证明这些交点在一条直线上(图 58)；

(c) 用 a, b, c, d 依次表示圆内接四边形 $ABCD$ 的各边的长度，e 和 f 是它的对角线的长度，则

$$ac + bd = ef$$

(托勒密定理).

问题 62(a) 已出现在这一册第一章 § 2 中(见问题 35，特别是图 32). 托勒密定理还将出现在第三册第二章中（见 § 4 中问题 258 和 259)，在那里给出了托勒密定理的逆定理（见问题 269) 和另一个定理，后者可以看作是托勒密定理的一个很有意义的推广(见 § 4 中问题 261 和 § 5 中问题 273).

63. 平面上给定四条直线，其中任何三条不过同一点，并且任何两条不平行. 证明由这些直线构成的四个三角形的高的交点在一直线上.

这个问题还将在第三册第一章 §2 中出现〔见问题 30(b)〕.

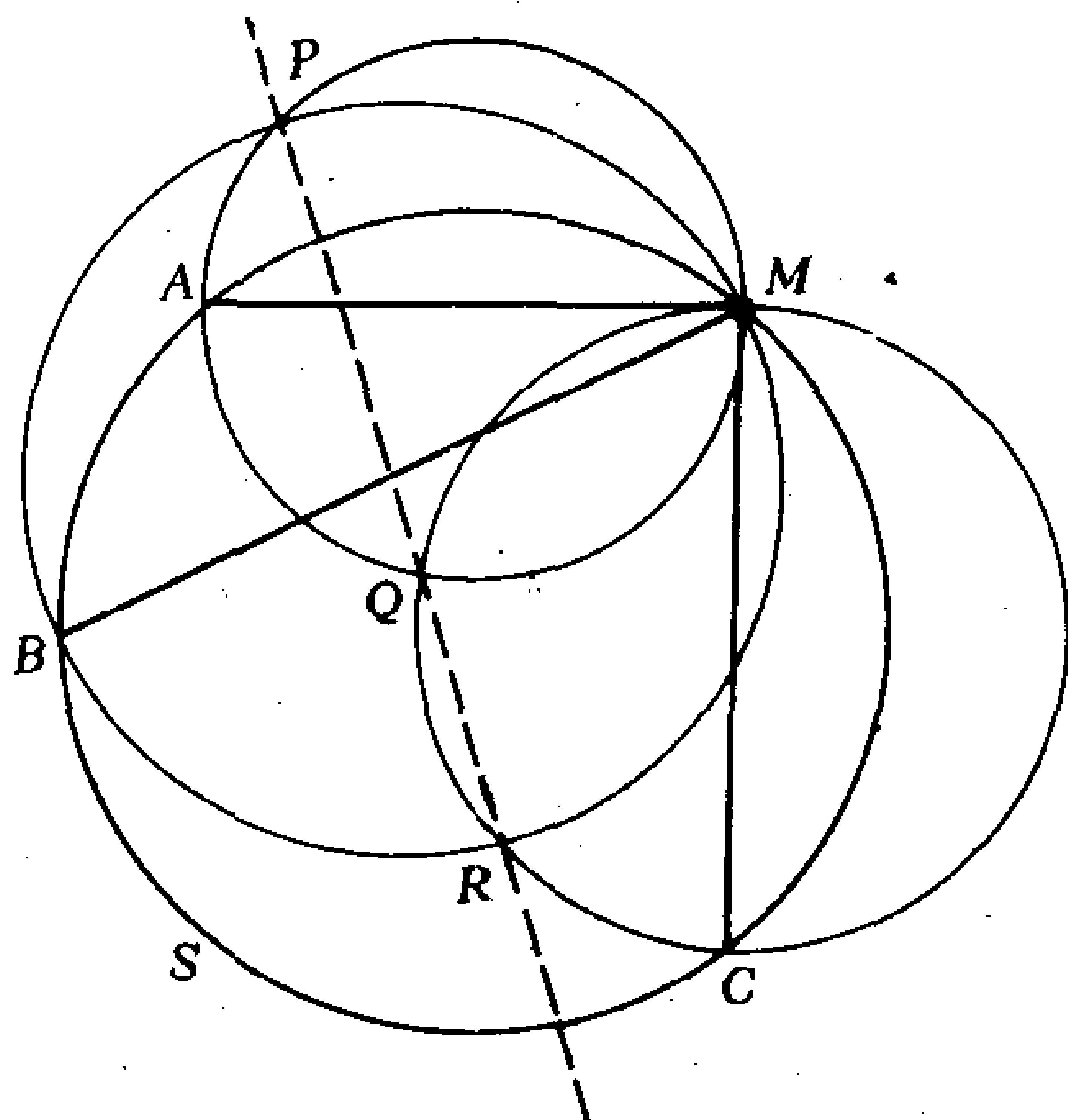


图 58

64. 设 S_1 和 S_2 是两个相交的圆，点 M 是到 S_1 和 S_2 的切线长有给定比的点，找出点 M 的轨迹.

参看第三册第二章 §3 中问题 250(b) 和 §4 中问题 260.

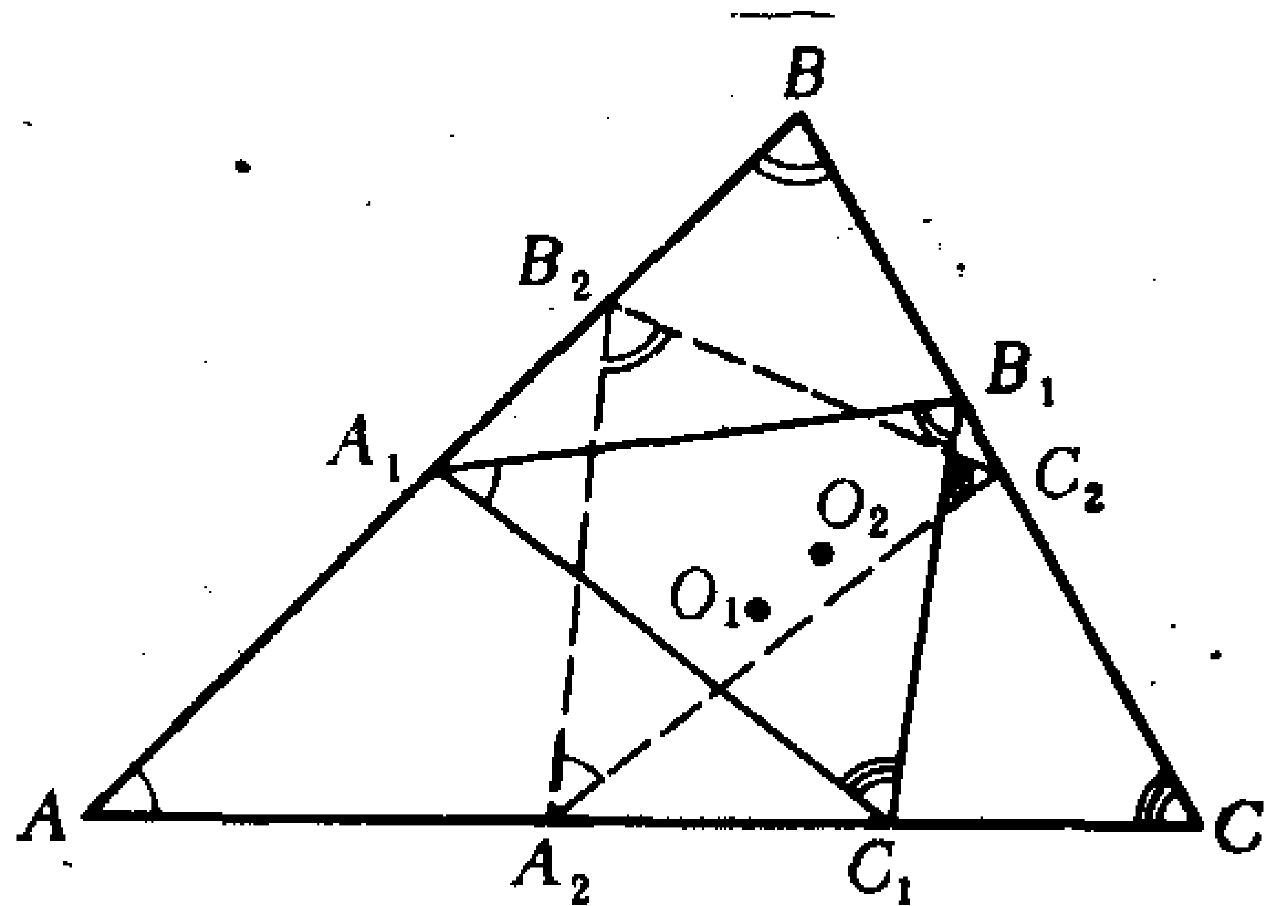


图 59

在给定三角形 ABC 中作另一个相似于 $\triangle ABC$ 的内接三角形 $A_1B_1C_1$（字母的顺序表明了两个三角形的边的对应关系），使得 $\triangle A_1B_1C_1$ 的顶点 A_1 在 AB 上，顶点 B_1 在 BC 上，顶点 C_1 在 CA 上（图 59）. 满足我们所说条件的三角形 $A_1B_1C_1$ 有无穷多个（因为我们可以按任意方式选取 $\triangle A_1B_1C_1$ 的一条边的方向或一个顶点的位置〔见第一章 §1 中问题 9(b) 和 §2 中问题 30(a)〕）. 所有这样的 $\triangle A_1B_1C_1$

都可以看作是$\triangle ABC$在以O_1作为公共旋转中心的螺旋相似下的像(见定理3的证明). 点O_1称为$\triangle ABC$的第一旋转中心. $\triangle ABC$的第二旋转中心O_2是指$\triangle ABC$和相似于它的$\triangle A_2B_2C_2$的公共旋转中心(字母的顺序指明了两个三角形的边的对应关系),这里$\triangle A_2B_2C_2$内接于$\triangle ABC$,并且使得A_2在CA上,B_2在AB上,C_2在BC上.

65. 设$\triangle A'B'C'$相似于$\triangle ABC$(字母的顺序指明了两个三角形的边的对应关系),并且A'在$\triangle ABC$的BC边上,B'在AC边上,C'在AB边上. 证明$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的旋转中心O是$\triangle ABC$的外接圆圆心.

66. 设圆O_1和O_2分别是$\triangle ABC$的第一和第二旋转中心,O是外接圆圆心. 证明

(a) $\angle O_1AB=\angle O_1BC=\angle O_1CA=\angle O_2BA=\angle O_2CB=\angle O_2AC$(图60);反之,如果点$M$使得

$$\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA,$$

则点M与O_1重合;

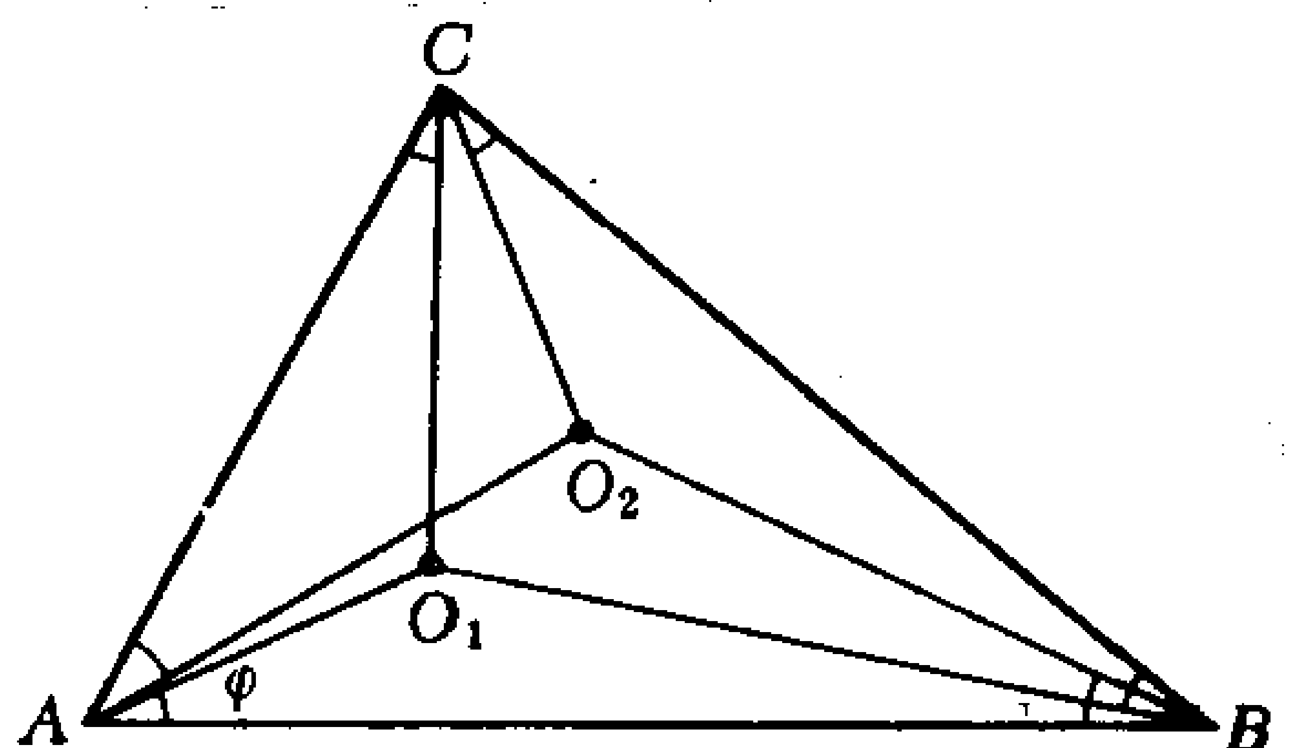


图 60

(b) O_1和O_2重合,当且仅当ABC是等边三角形;

(c) O_1和O_2与O的距离相等:$O_1O=O_2O$;

(d) 角O_1AB, O_1BC, O_1CA, O_2BA, O_2CB, O_2AC的值φ〔见(a)〕不超过$30°$;$\varphi=30°$,当且仅当$\triangle ABC$是等边三角形.

67. 给定三角形ABC,求作它的旋转中心O_1和O_2.

68. 设$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$都内接于$\triangle ABC$,并且与

$\triangle ABC$ 相似，（字母的顺序指明了这些三角形的边的对应关系），点 A_1, B_1, C_1 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB, BC, CA 上，点 A_2, B_2, C_2 分别在边 CA, AB, BC 上. 另外还假设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的边 A_1B_1 和 A_2B_2 与$\triangle ABC$ 的边 AB 构成等角(图 61). 证明

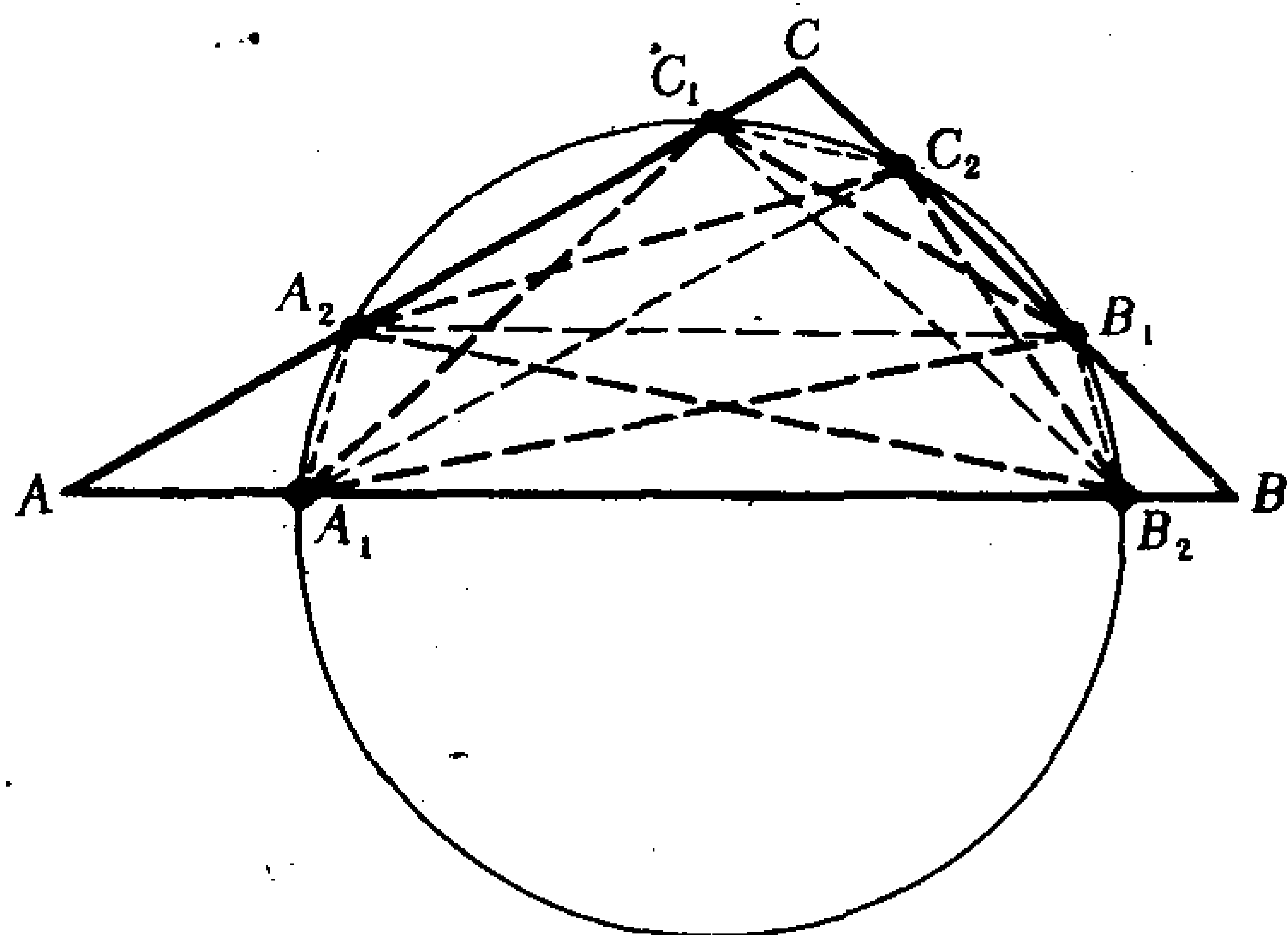


图 61

(a) $\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$ 全等；

(b) 直线 B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 分别平行于边 BC, CA, AB，而直线 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 分别反平行①于这些边；

(c) $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 六点在一个圆上.

69. (a) 设 A_1, B_1, C_1和A_2, B_2, C_2 分别是$\triangle ABC$ 的第一和第二旋转中心在三角形各边上的投影. 证明 $\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$ 都相似于$\triangle ABC$，并且彼此全等；六个点 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 都

① 一条与$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 分别交于 P 和 Q 的直线称为反平行于边 BC，如果$\angle APQ=\angle ACB$，并且$\angle AQP=\angle ABC$（如果$\angle APQ=\angle ABC$，并且$\angle AQP=\angle ACB$，则线段 PQ 平行于边 BC）.

在一个圆上，该圆的中心是联结$\triangle ABC$的第一和第二旋转中心的线段的中点〔图 62(a)〕.

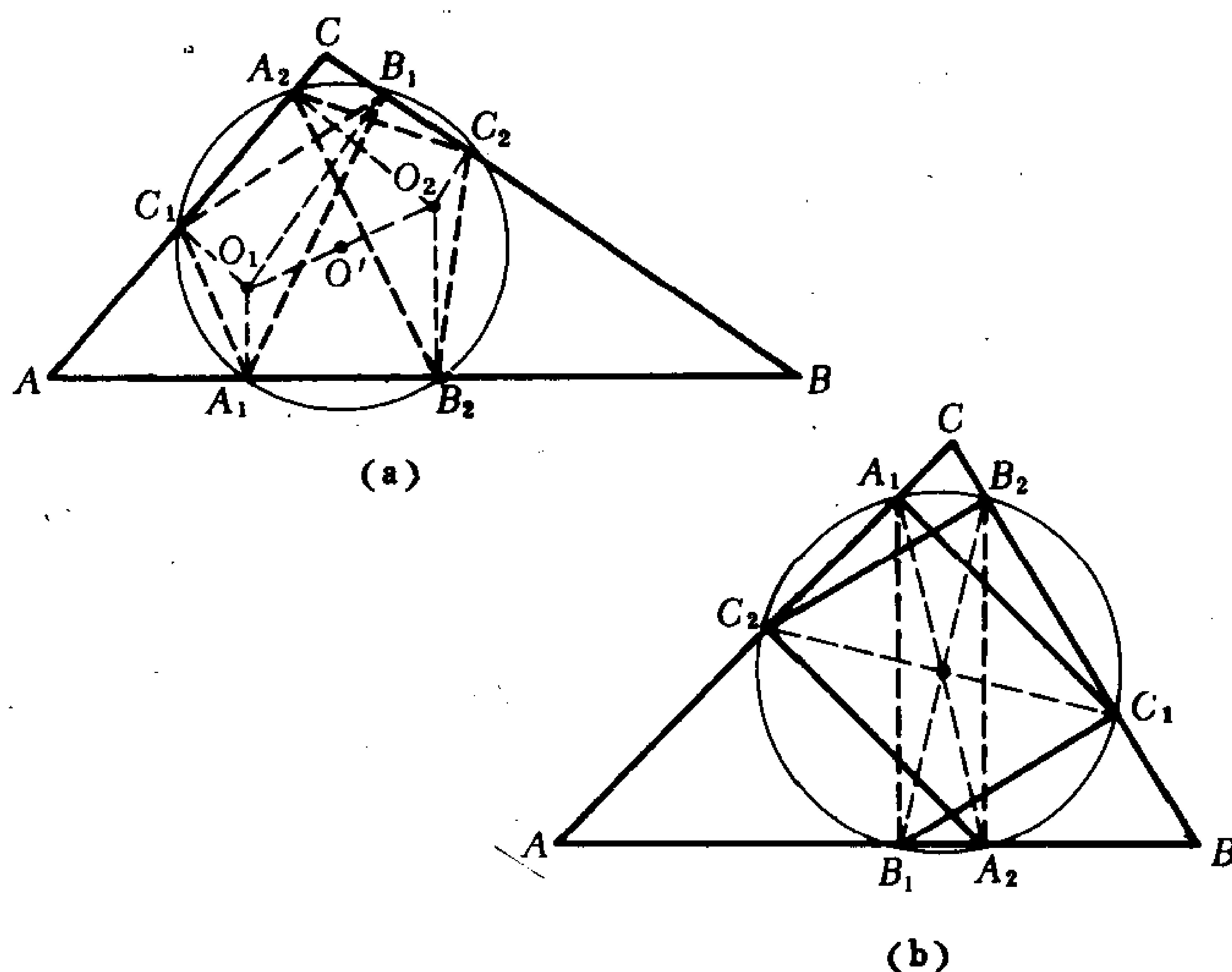


图 62

(b) 证明：在一给定的三角形 ABC 中，可以作两个内接三角形 $A_1B_1C_1$和$A_2B_2C_2$，使得这两个三角形的边分别垂直于$\triangle ABC$ 的边；而且这两个三角形彼此全等；联结这两个三角形对应顶点的三条线段彼此相等，并交于同一点——它们的中点〔图 62(b)〕.

70. 设 O_1 是$\triangle ABC$ 的一个旋转中心；A'，B'，C' 是直线 AO_1，BO_1，CO_1 与$\triangle ABC$ 外接圆的交点. 证明

(a) $\triangle A'B'C'$ 全等于$\triangle ABC$；

(b) 六边形 $AC'BA'CB'$ 被它的顶点与 O_1 的联线所分成

的六个三角形都与$\triangle ABC$相似.

71. 设M是$\triangle ABC$内任意一点. 证明：在$\angle MAB$，$\angle MBC$，$\angle MCA$中和在$\angle MAC$，$\angle MCB$，$\angle MBA$中都至少有一个角不超过$30°$.

作为本节的结尾，我们考虑三个相似图形F_1,F_2,F_3的某些性质. 用O_3,O_2,O_1表示这三个图形中依次两个的旋转中心. $\triangle O_1O_2O_3$称为图形F_1,F_2,F_3的**相似三角形**. 这个三角形的外接圆称为图形F_1,F_2,F_3的**相似圆**①. 当点O_1,O_2,O_3在一直线上或重合时，相似圆退化成一条直线或一个点. 分别称它们为图形F_1,F_2,F_3的**相似轴**和**相似中心**.（若F_1,F_2,F_3两两中心相似，则相似圆退化成一条直线或一个点，见三相似中心定理第30页）.

在问题72和问题73中，我们假设图形F_1,F_2,F_3的相似圆不退化成一条直线或一个点.

72. 在平面上给定三个相似图形F_1,F_2,F_3. 设A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3是这三个图形中的三条对应线段；三角形$D_1D_2D_3$的边分别在直线A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3上（图63）. 证明

(a) 直线D_1O_1,D_2O_2,D_3O_3相交于图形F_1,F_2,F_3的相似圆上的一点U〔图63(a)〕；

(b) $\triangle A_1A_2D_3$，$\triangle A_1A_3D_2$，$\triangle A_2A_3D_1$的外接圆相交于图形

---

① 两个正向相似图形的旋转中心这个概念推广了下面两个概念：1) 两个正向全等图形的旋转中心；2) 两个中心相似图形的相似中心. 所以上面提到的那些点无论称为图形的"旋转中心"或"相似中心"都是合理的. 我们认为对于这一节的结尾部分中所讨论的问题来说，第二个名字更为合适. 因此我们说：三个正向相似图形中依次两个的相似中心构成这些图形的相似三角形. 但是"旋转中心"这一术语在文献中更为普遍.

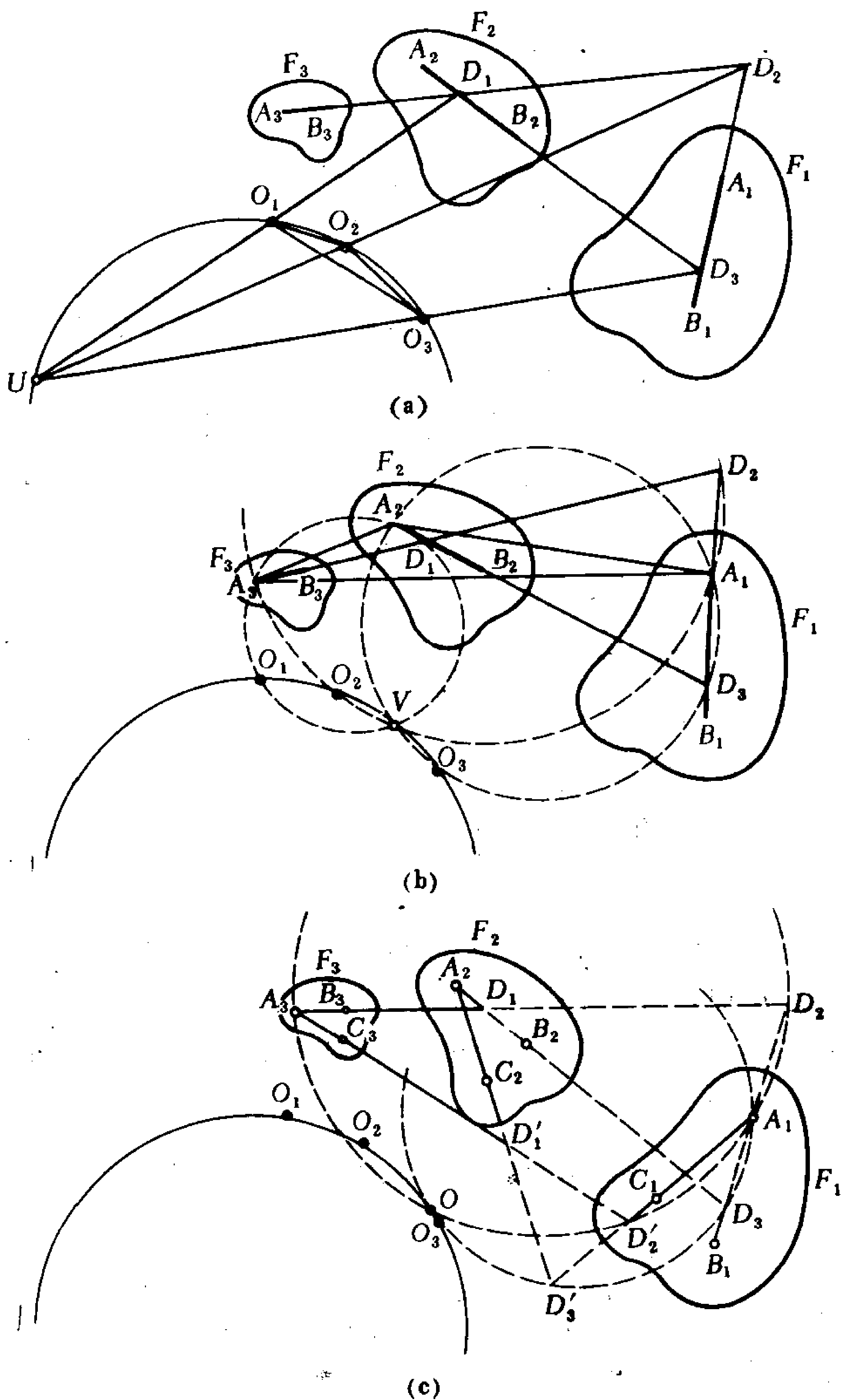


图 63

F_1, F_2, F_3 的相似圆上的一点 V〔图 63(b)〕；

(c) 设 $D_1'D_2'D_3'$ 是与 $\triangle D_1D_2D_3$ 不同的某个三角形，它的边在 F_1, F_2 和 F_3 的三条对应直线上. 则 $\triangle D_1D_2D_3$ 和 $\triangle D_1'D_2'D_3'$ 正向相似，并且它们的旋转中心 O 在图形 F_1, F_2, F_3 的相似圆上〔图 63(c)〕.

73. 设 F_1, F_2, F_3 是三个相似图形，l_1, l_2, l_3 是这些图形中的对应直线，并设 l_1, l_2, l_3 交于一点 W(图 64). 证明

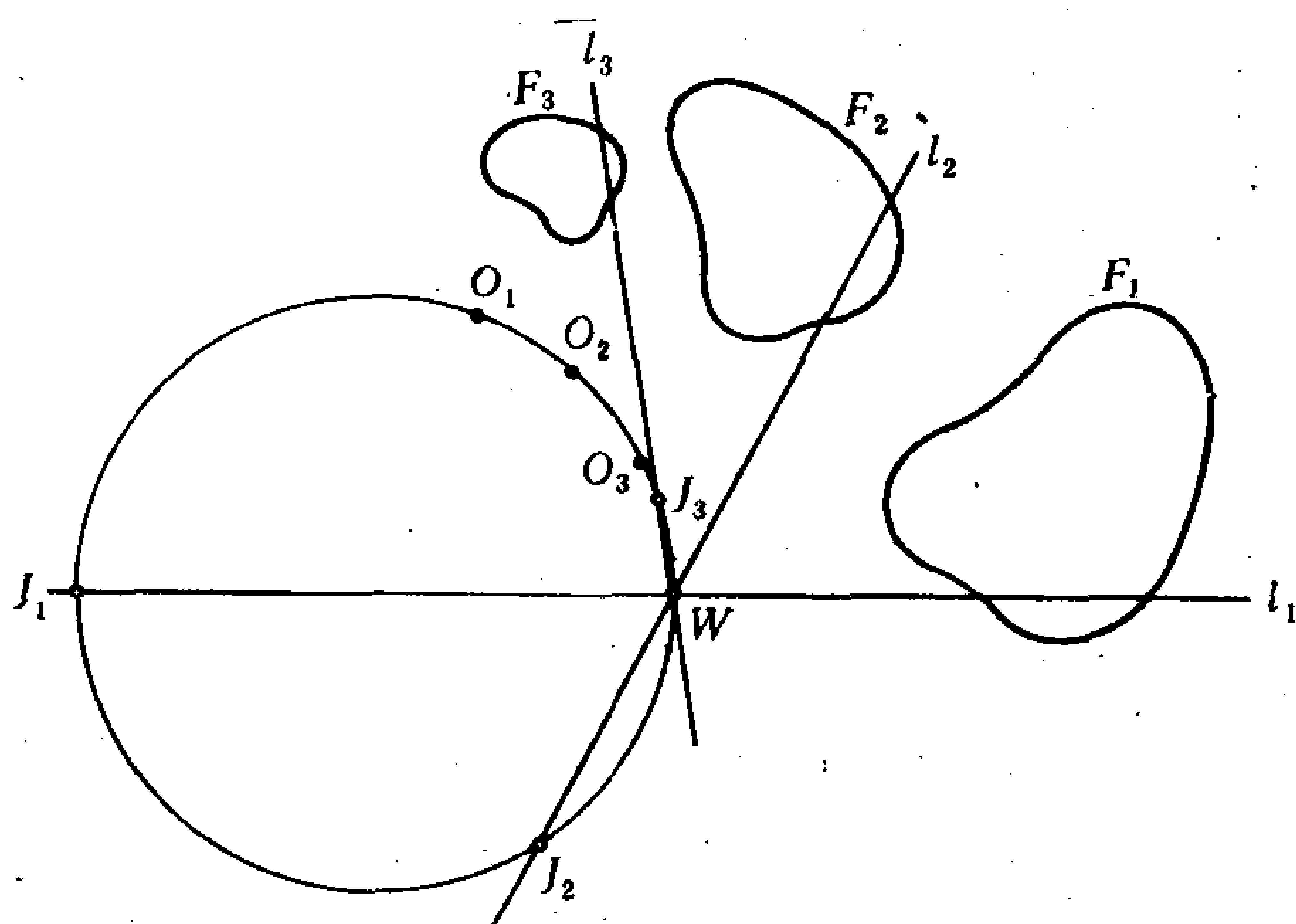


图 64

(a) W 在 F_1, F_2, F_3 的相似圆上；

(b) l_1, l_2, l_3 分别经过 F_1, F_2, F_3 的相似圆上的三个定点 J_1, J_2, J_3 (即这三个点不依赖于直线 l_1, l_2, l_3 的选取).

除了问题 72 和问题 73 中所陈述的定理外，还可以指出三个相似图形 F_1, F_2, F_3 所具有的其它许多值得注意的性质. 我们把其中的某些性质列在下面：

I. $\triangle J_1J_2J_3$〔见问题 73 (b)〕反向相似于 $\triangle D_1D_2D_3$，其中

后一个三角形的边分别在图形 F_1, F_2, F_3 的任意三条对应直线上.

II. 直线 J_1O_1, J_2O_2, J_3O_3 交于一点 T.

III. 若 F_1, F_2, F_3 的三个对应点 A_1, A_2, A_3 在一直线上，则这直线过一固定点 T（即 II 中所述的点 T）. 反之，每条过 T 的直线包含 F_1, F_2, F_3 的三个对应点.

IV. 若 A_1, A_2, A_3 是图形 F_1, F_2, F_3 的三个对应点，则 $\triangle A_1O_2O_3$, $\triangle A_2O_1O_3$, $\triangle A_3O_1O_2$ 的外接圆交于一点.

V. 图形 F_1 中的点 A_1 的基本三角形是指 $\triangle A_1A_2A_3$，其中 A_2 和 A_3 是点 A_1 在 F_2 和 F_3 中的对应点. 则有

(a) 使得 A_1 的基本三角形 $A_1A_2A_3$ 的 $\angle A_2A_1A_3$（或 $\angle A_1A_2A_3$ 或 $\angle A_1A_3A_2$）等于给定角的点 A_1 的轨迹是圆；

(b) 使得基本三角形 $A_1A_2A_3$ 的边 A_2A_3（或 A_1A_3 或 A_2A_1）有给定长度的点 A_1 的轨迹是圆；

(c) 使得基本三角形 $A_1A_2A_3$ 的边之比 A_1A_2/A_1A_3（或 A_1A_2/A_2A_3 或 A_1A_3/A_2A_3）有给定值的点 A_1 的轨迹是圆；

(d) 使得基本三角形 $A_1A_2A_3$ 有给定面积的点 A_1 的轨迹是圆.

我们把所有这些断言的证明留给读者.

2. 保距变换和相似变换在求解极大极小问题中的应用

这很短的一节与本书中其它部分的联系不是很紧密的. 在这一节中收集了一些找各种几何量的最大值和最小值的问题. 这些问题可以用各种方法解决，但是在多数情况下是通过保距变换或相似变换来解决的. 这后一种情况正好说明了本书包含这一节的原因.

74. (a) 给定直线 l 和位于 l 同侧的两个点 A 和 B. 在直线 l 上求一点 X,使得距离 AX 与 BX 之和有最小值.

(b) 给定直线 l 和位于 l 异侧的两个点 A 和 B. 在 l 上找一点 X,使得距离 AX 与 BX 之差尽可能地大.

75. (a) 在给定三角形 ABC 中求作内接三角形,使得它的一个顶点为 AB 边上的给定点 P,并且它的周长有最小值.

(b) 在给定三角形 ABC 中作内接三角形,使它的周长有最小值.

76. 在给定四边形 $ABCD$ 中作有极小周长的内接四边形. 证明这个问题在一般情况下没有正常的解(即没有非退化四边形解). 但若四边形 $ABCD$ 可以内接于圆,则问题有无穷多个解,即有无穷多个内接于 $ABCD$ 的周长相同的四边形,使得任何其余的内接于 $ABCD$ 的四边形比它们有更长的周长.

我们可以提出下面更一般的问题:在给定的 n 边形中作有极小周长的内接 n 边形. 用类似于解问题 75 (b) 和问题 76 时所用的方法可以证明,当 n 是奇数时,这个问题一般有唯一解;而当 n 为偶数时,本问题或根本无解或有无穷多个解.

77. 在给定的三角形 ABC 中,作内接三角形,使它的三条边分别垂直于外接圆半径 OA, OB, OC. 从这个作图法导出当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形的情形,问题 75(b)的另一个解法.

78. 在给定的三角形 ABC 中,作内接三角形 DEF,并使得 $a \cdot EF + b \cdot FD + c \cdot DE$ 有最小值,其中 a,b,c 是给定的正数.

79. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上找一点 M,使它到各顶点的距离之和尽可能地小.

80. (a) 作给定三角形 ABC 的外接等边三角形,使得过点 A, B, C 所作的这等边三角形各边的垂线交于一点. 从这个

作图法导出问题 79 的另一个解法.

(b) 在给定三角形 ABC 中作内接等边三角形，使得从点 A，B，C 向等边三角形各边所作的垂线交于一点. 从这个作图法导出问题 79 的又一种解法.

81. (a) 设 ABC 是等边三角形，M 是这三角形所在平面上的任意一点. 证明 $MA+MC\geqslant MB$. 问：什么时候有 $MA+MC=MB$?

(b) 由题(a)中的命题再导出问题 79 的另一个解法.

82. 设 ABC 是等腰三角形，$AC=BC\geqslant AB$. 对于三角形所在平面上怎样的点 M，M 到 A 的距离与 M 到 B 的距离之和减去 M 到 C 的距离，即 $MA+MB-MC$ 有极小值?

83. 在给定三角形 ABC 所在的平面上找一点 M，并使得 $a\cdot MA+b\cdot MB+c\cdot MC$ 有最小值，其中 a,b,c 是给定的正数.

问题 83 中的数 a，b，c 可以允许有某些是负的. 但是在求解这类问题时必须区别许多不同的情形(参看问题 82 的解).

习题解答

第一章 相似变换的分类

1. 设直线 l 已作出（图 65）. 由假设点 C 以 A 为相似中心，以 n/m 为相似系数，中心相似于点 B，所以它落在以 A 为相似中心，以 n/m 为相似系数，中心相似于 l_1 的直线 l_1' 上. 因而点 C 可以作为直线 l_2和l_1' 的交点被作出. 若 l_1 不平行于 l_2，则本题有唯一解；若 $l_1 \not\parallel l_2$，则 l_1' 或平行于 l_2 或与 l_2 重合，对应于这两种情形，本题或无解或解不定.

2. (a) 所求的轨迹可由圆 S 经过中心为 A，相似系数为 1/2 的中心相似变换得到. 因此它是以 AO 为直径的圆，这里 O 是 S 的中心〔图 66 (a)〕.

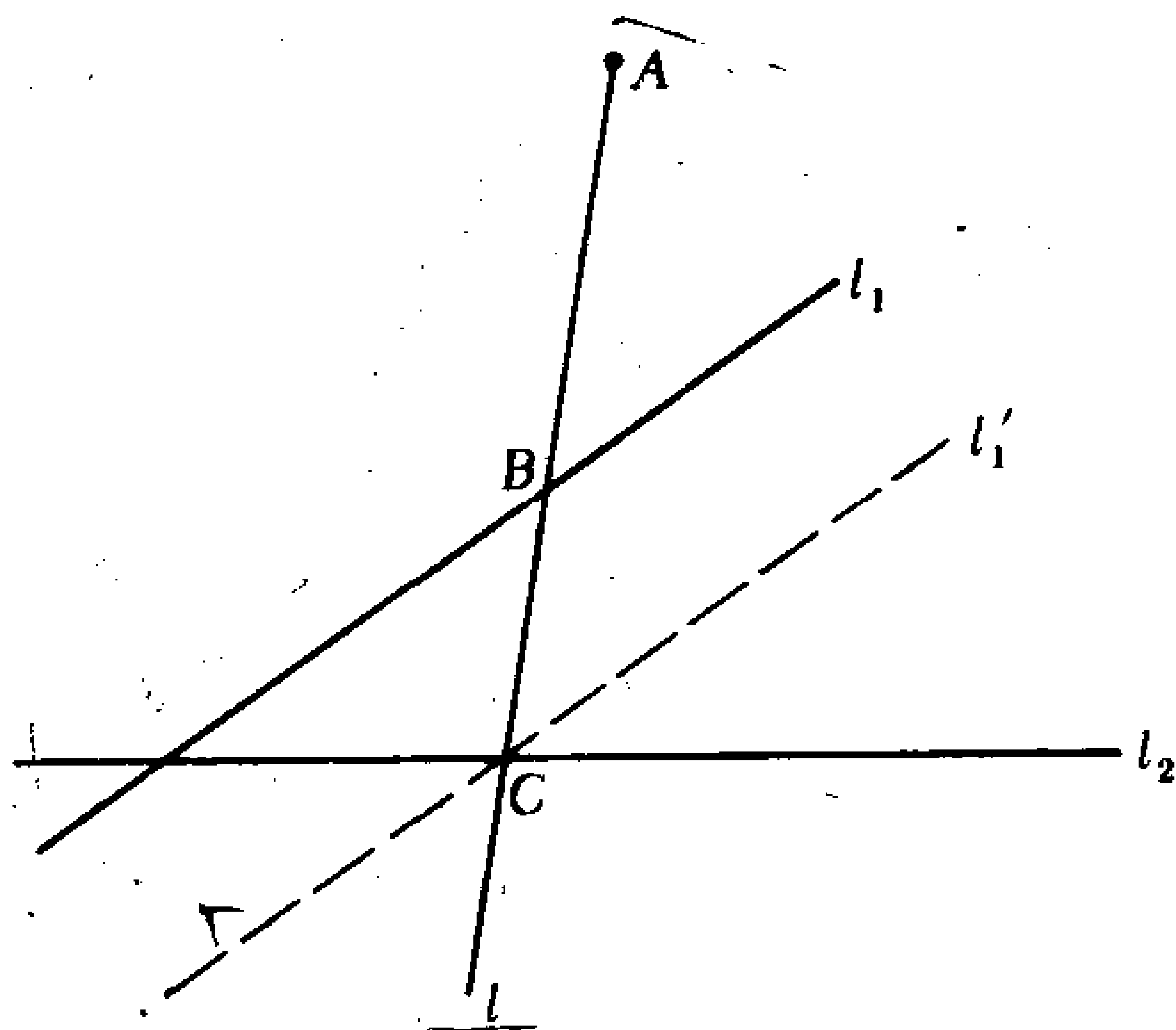
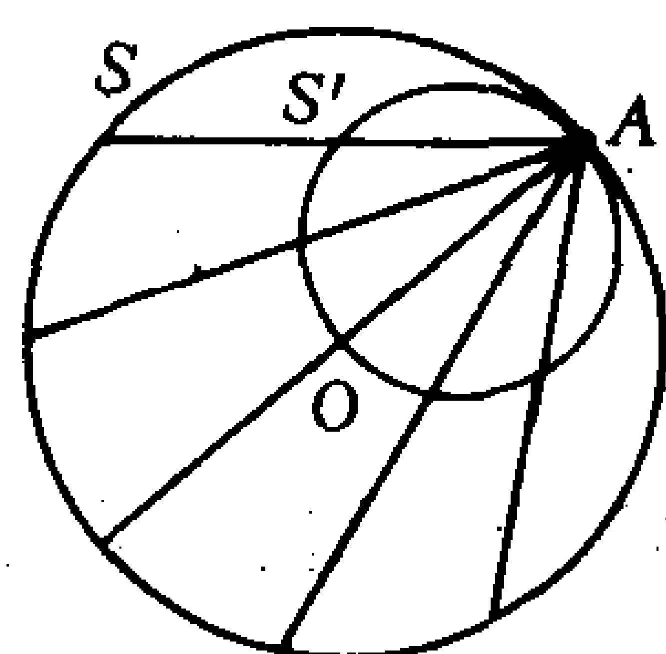
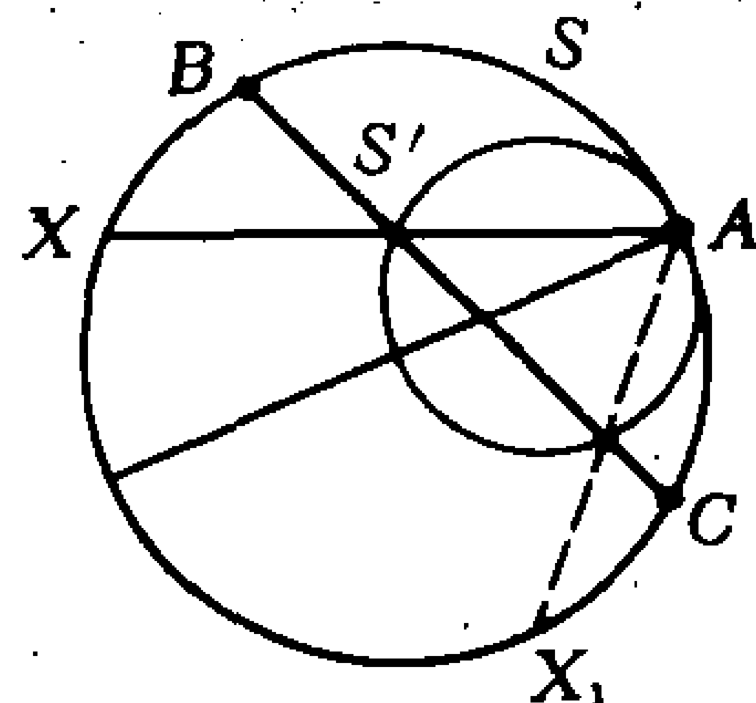


图 65

(b) 作以 AO 为直径（O 是 S 的中心）的圆 S'. 因为 S' 是 S 的所有经过点 A 的弦的中点的轨迹〔见(a)〕，S' 与弦 BC 的交点确定所要作的弦〔图 66 (b)〕. 本题可以有两个解，一个解或无解.



(a)



(b)

图 66

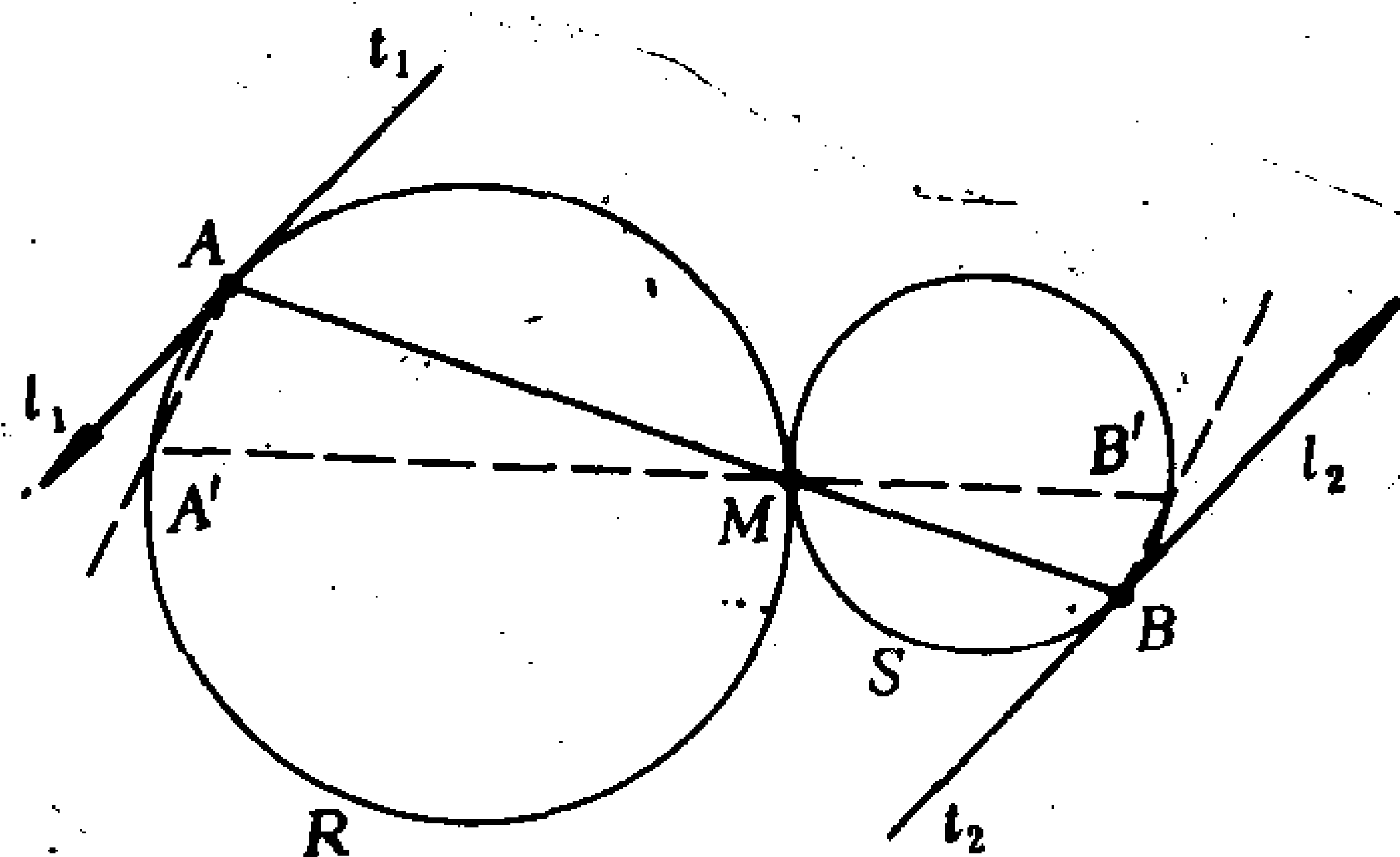


图 67(a)

3. 考虑以 M 为中心，系数为 $\mp r_2/r_1$（当两圆外切时〔图 67 (a)〕取“－”号，而当两圆内切时〔图 67 (b)〕取“＋”号）的中心相似，这里 r_1,r_2 分别为圆 R 和 S 的半径. 这个变换把半径为 r_1 的圆 R 变成与 R 在点 M 相切的半径为 r_2 的圆，即把 R 变成 S. 圆 R 的点 A 在这变换下变到圆 S 的点 B，并且 R 在 A 的切线 t_1 变成 S 在 B 的切线 t_2. 因为 t_2是由t_1 经过中心相似得到的，所以这两条直线平行.

4. 考虑以 M 为中心，系数为 $k=r_2/r_1$ 的中心相似变换，这里 r_1和r_2 分别是圆 R 和 S 的半径. 这个变换把直线 m 和 n 变成它们自身，并且把与 m 和 n 相切的、半径为 r_1 的圆 R 变成与 m 和 n 相切的半径为 r_2 的圆 S（图 68）. 还有，直线 l 变成它自身，线段 AB 变成 CD，点 E 变到 F，因而$\triangle ABE$ 变成$\triangle CDF$. 由此可知，这两个三角形是相似的〔(a)的断言〕，并且

相似系数是 $k=r_2/r_1$. 所以△CDF 的面积 · △ABE的面积 $=k^2=(r_2/r_1)^2$〔(b) 的断言〕. 最后，从△CDF 是由△ABE 经过以 M 为中心的中心相似得到的，可知这两个三角形的对应点的连线，例如它们重心（即它们的中线的交点）的连线，经过点 M〔(c)的断言〕.

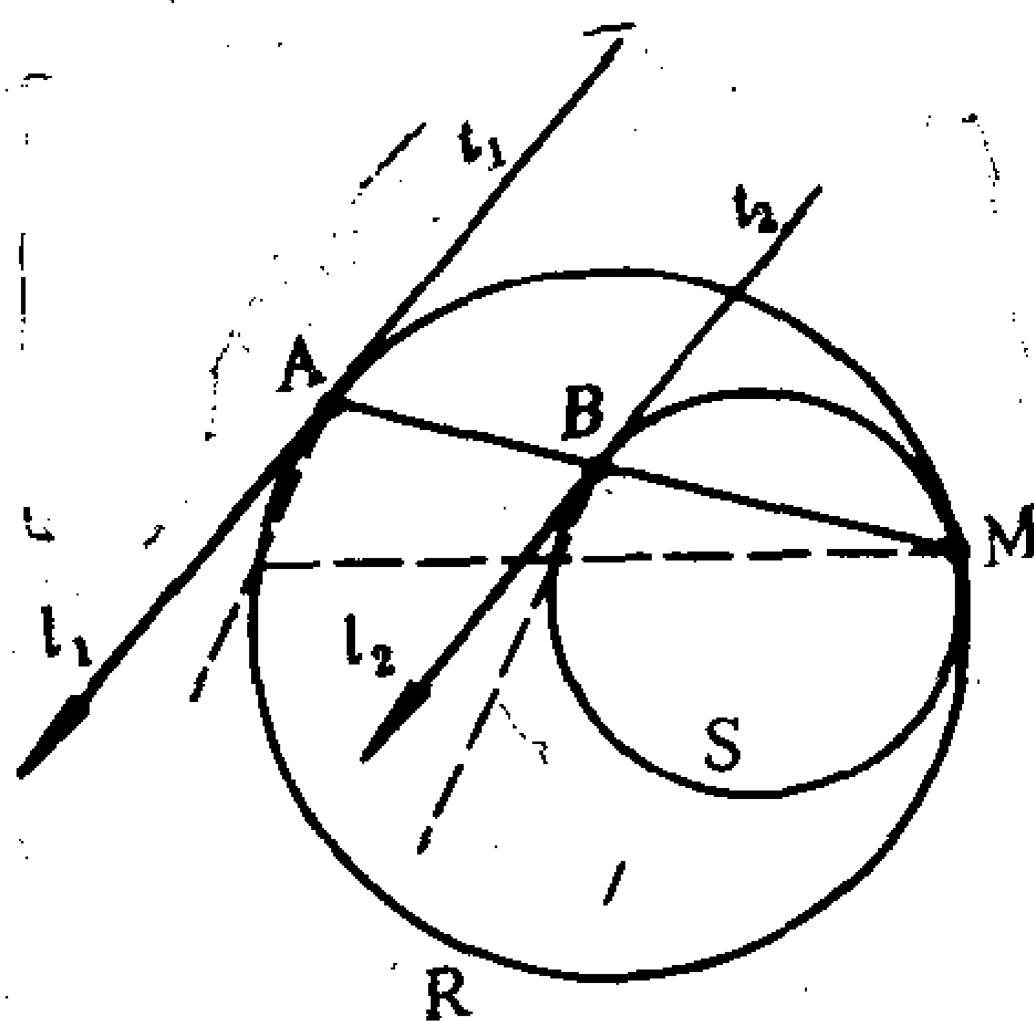


图 67(b)

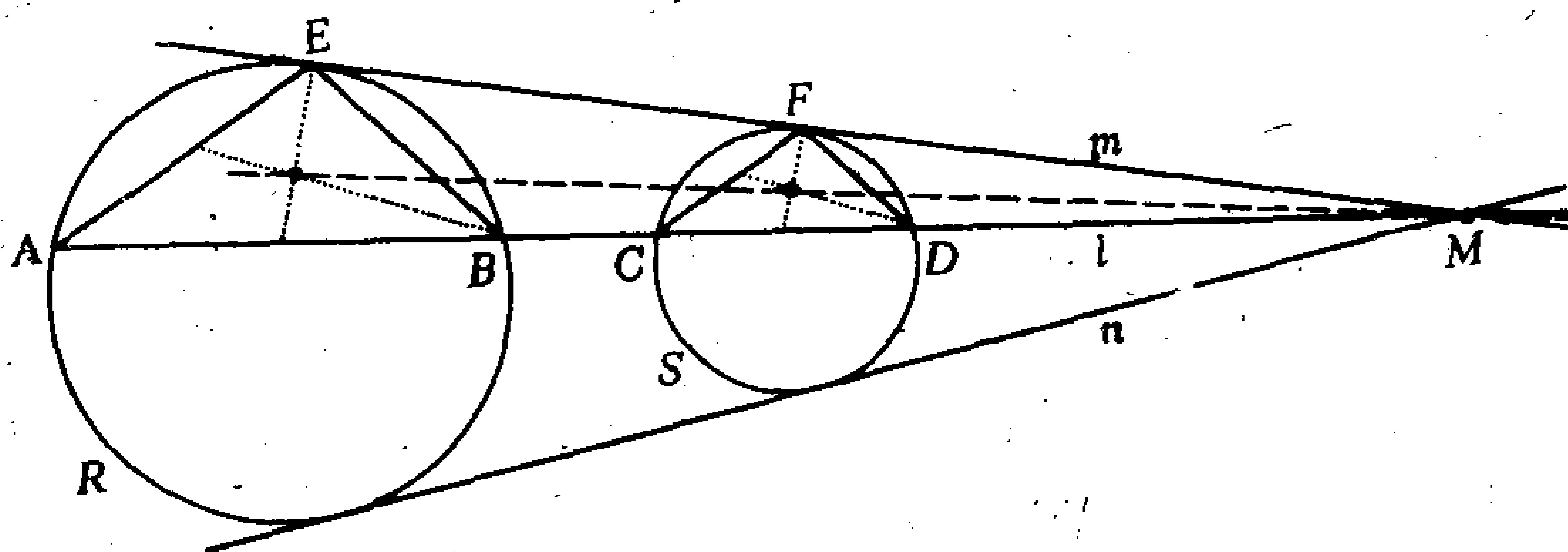


图 68

5. (a) 以 M 为中心，系数为

$$k=DC/AB=MD/MA=MC/MB$$

的中心相似（图 69）把△MAB 变成△MDC，并且把△MAB 的外接圆 R 变成△MDC 的外接圆 S. 因为 S 是由 R 经过以 R 的点 M 为中心的中心相似得到的，由此即知 R 与 S 在 M 相切.

(b) 以 N 为中心，系数为

$$k_1=CD/AB=NC/NA=ND/NB$$

（在这里我们所考虑的是有向线段之比，所以 k_1 是负的）的中

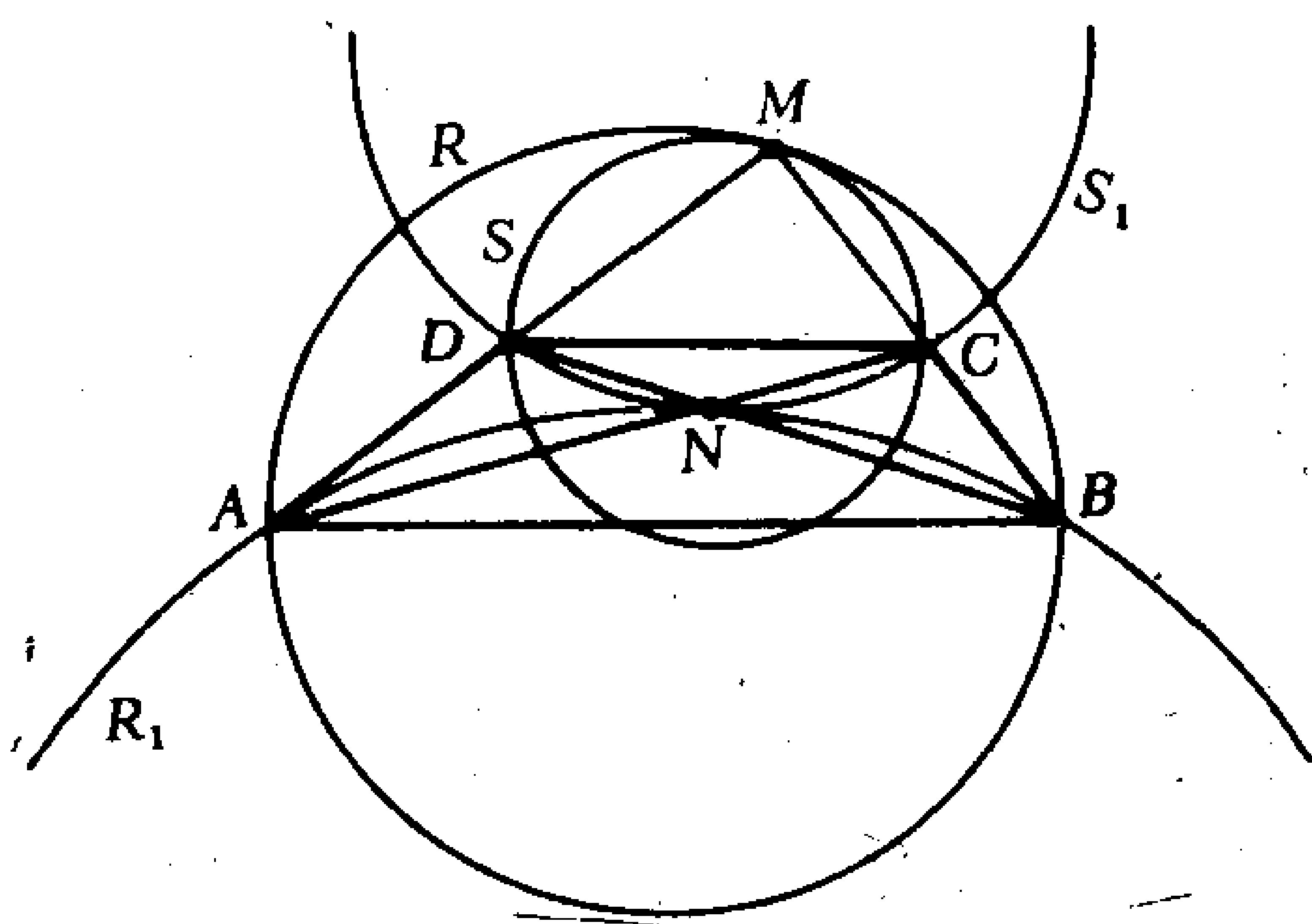


图 69

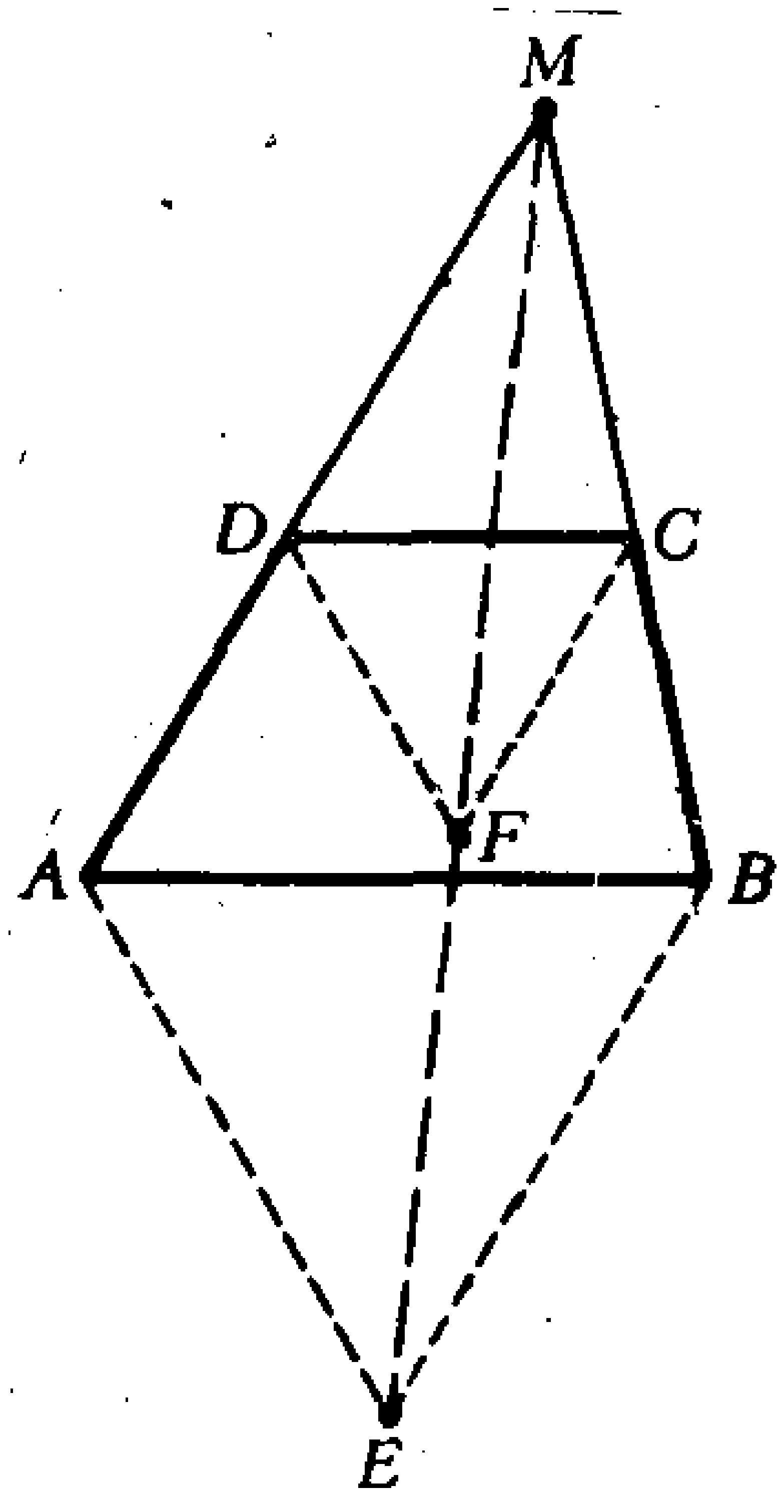
心相似把△NAB变成△NCD，并且把△NAB的外接圆R_1变成△NCD的外接圆S_1. 因为相似中心N在R_1上，所以R_1和S_1在N相切.

(c) S与R的半径之比是$k=DC/AB$〔因为△MAB与△MDC相似，见(a)〕. 圆S_1与R_1的半径之比是$|k_1|=|CD/AB|$〔见(b)的解〕. 但是，有$|CD/AB|=DC/AB$，这就证明了(c)中的断言..

6. (a) 若M是梯形$ABCD$的两条不平行边AD和BC的交点〔图70(a)〕，则中心为M，系数为DC/AB的中心相似把线段AB变成线段DC，且把△ABE变成△DCF〔参看问题5(a)的解〕. 由此即可得出本题中的断言.

(b) 若N是梯形$ABCD$的对角线AC和BD的交点〔图70(b)〕，则中心为N，系数为CD/AB(负的！)的中心相似把线段AB变成CD，并且它把两个正方形中的一个变成另一个〔参看问题5(b)的解〕. 由此即知本题中的断言成立.

7. 中心在梯形$ABCD$的边AD和BC的延长线交点M，相似系数为DC/AB的中心相似把线段AB变成线段DC，并且把AB的中点K变成DC的中点L〔参看问题6(a)的解〕. 所以直线KL过相似中心M(图71). 中心在梯形$ABCD$的对角线AC和BD的交点N，系数为CD/AB(负的！)的中心相似也把点



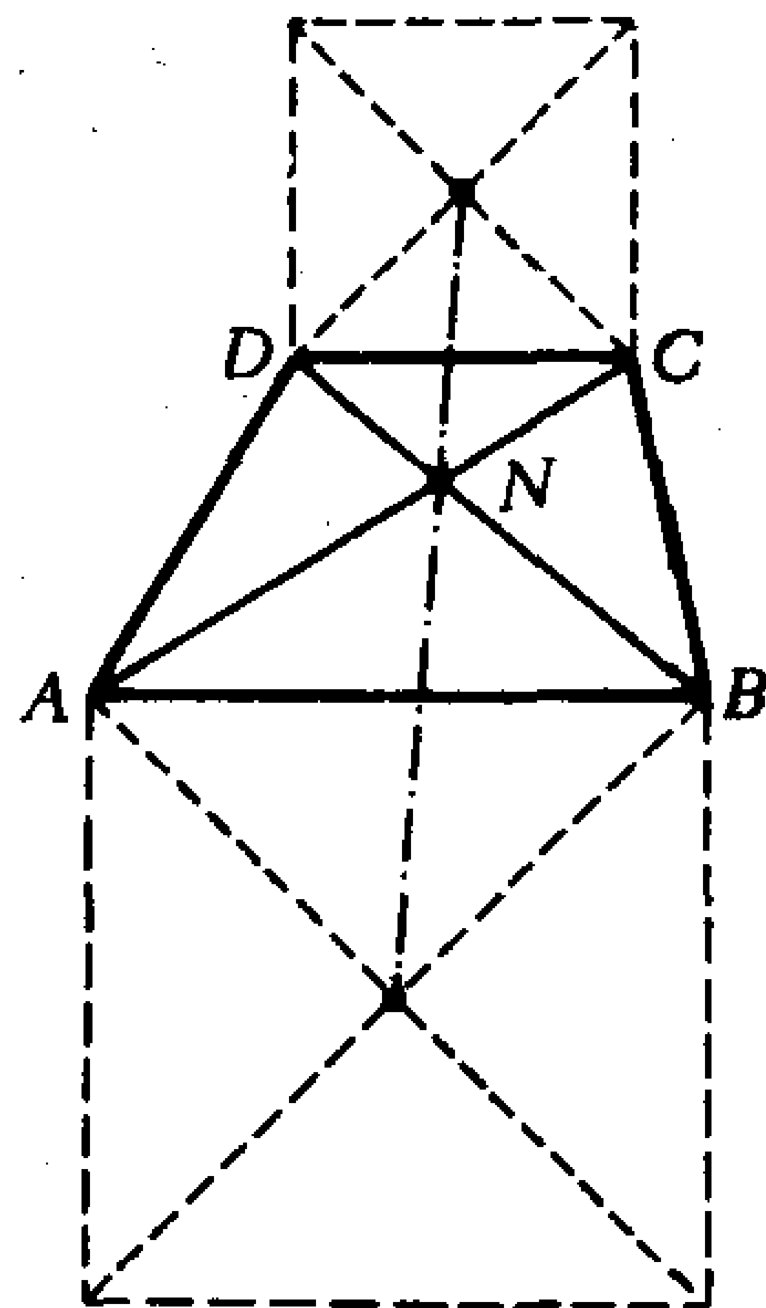


图 70

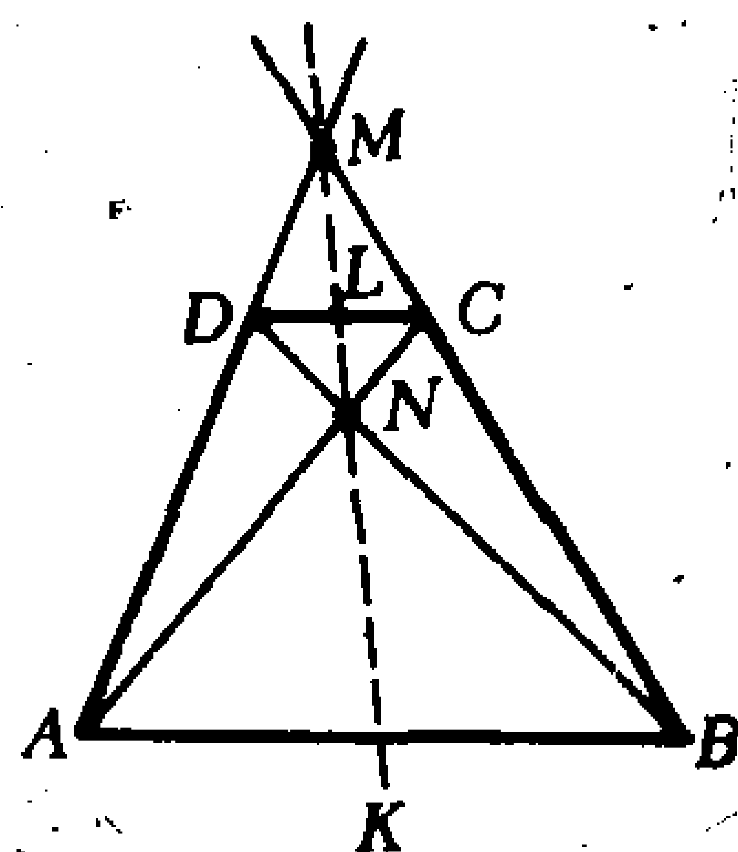


图 71

K 变成点 L. 这变换把线段 AB 变成 CD〔参看问题 6(b)的解〕. 所以直线 KL 也过点 N.

8. (a) 设所要作的直线 l 已作好，因而有 $AB/AC=1/2$〔图 72(a)〕. 由此我们得出下面的解法. 以圆 S_1 上任意一点 A 为相似中心，以 1/2 为相似系数作中心相似于圆 S_2 的圆 S_2'，所要作的直线由 S_2 与 S_2' 的交点和点 A 确定.（当 A 选定以后，这样的直线可以有两条，或恰好一条，或根本没有.）

(b) 再次假设直线 l 已作出使得 $AB/AC=1/2$〔图 72(b)〕，我们可以得出下面的作图法. 以圆 S_1 上任意一点 A 为相似中心，以 1/2 为相似系数，作中心相似于 S_3 的圆 S_3'，圆 S_2 与 S_3' 的交点和点 A 确定所要作的直线.（当 A 选定以后，

这样的直线可以有两条，或一条，或没有.）

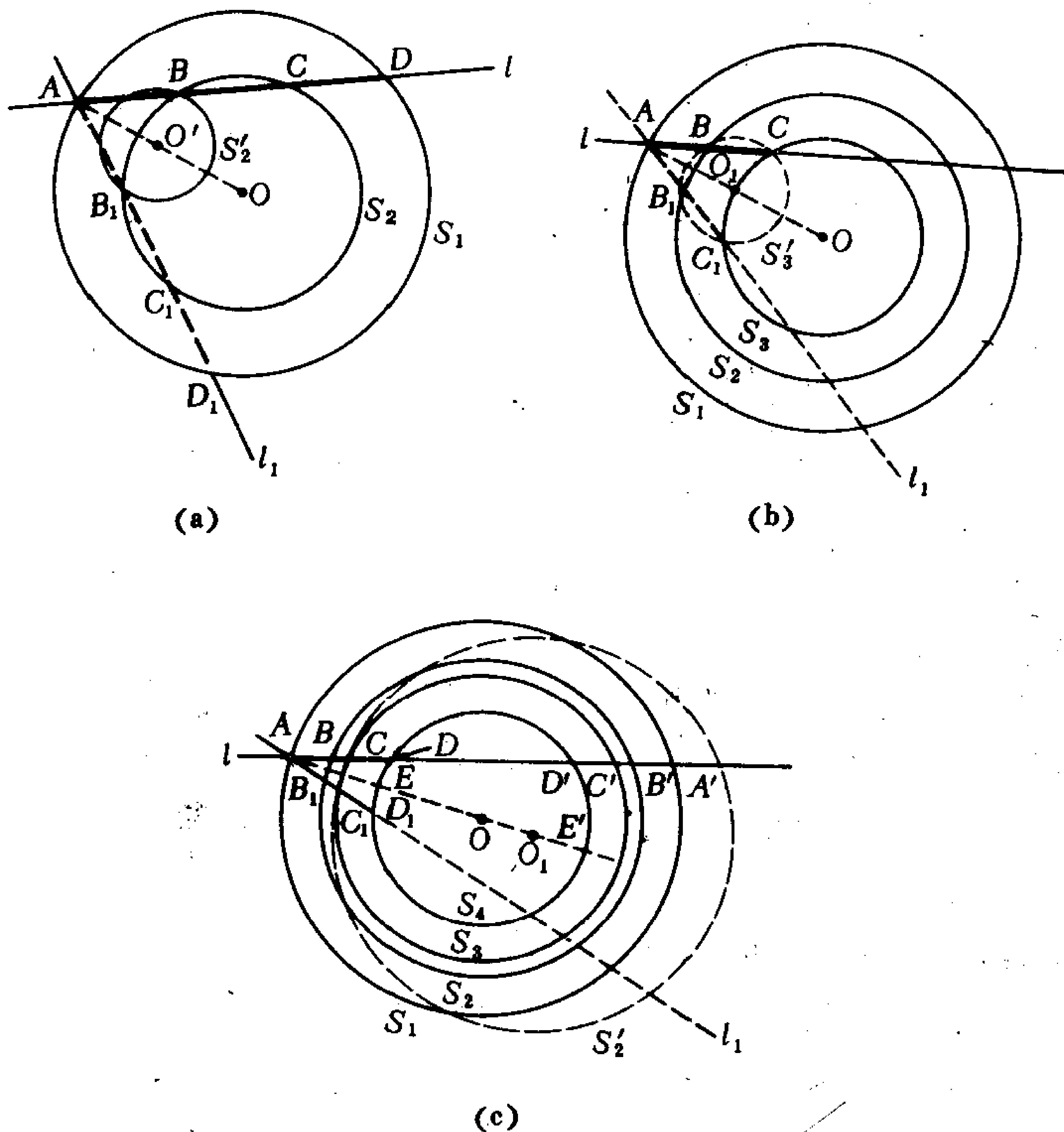


图 72

(c) 设直线 l 已找到，并设 A', B', C', D' 是 l 与圆 S_1, S_2, S_3, S_4 的另外四个交点〔图 72 (c)〕. 显然，$AB = C'D'$. 因此

$$AD' = AB + BC' - D'C' = BC',$$

所以有

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AD\cdot AD'}{BC\cdot BC'}.$$

数量 $AD\cdot AD'$ 不依赖于从 A 所引的直线与 S_4 的交点 D 和 D' 的位置，它等于 $AE\cdot AE'$（这里 E 和 E' 是直线 AO（O 是四个圆的公共中心）与 S_4 的交点），即等于 $(r_1-r_4)(r_1+r_4)$，这里 r_1和r_4 分别是 S_1和S_4 的半径. 类似地有 $BC\cdot BC'=(r_2-r_3)(r_2+r_3)$，这里 r_2 和 r_3 分别是 S_2 和 S_3 的半径. 于是有

$$\frac{AD}{BC}=\frac{r_1^2-r_4^2}{r_2^2-r_3^2}.$$

又由

$$AD=AB+BC+CD=2AB+BC,$$

有

$$\frac{AD}{BC}=2\frac{AB}{BC}+1.$$

所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2-r_4^2}{r_2^2-r_3^2}-1\right)=\frac{r_1^2-r_2^2+r_3^2-r_4^2}{2(r_2^2-r_3^2)}.$$

这样就有

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB+BC}{AB}=1+\frac{BC}{AB}$$

$$=1+\frac{1}{AB/BC}=\frac{r_1^2+r_2^2-r_3^2-r_4^2}{r_1^2-r_2^2+r_3^2-r_4^2}.$$

因此，AC/AB 可以认为是已知的.

由此我们得出下面的作图法：以圆 S_1 上任意一点 A 为相似中心，以

$$k=\frac{r_1^2+r_2^2-r_3^2-r_4^2}{r_1^2-r_2^2+r_3^2-r_4^2}$$

为相似系数作中心相似. 设这个变换把圆 S_2 变到圆 S'_2. 所求作的直线由 S'_2 与 S_3 的交点和点 A 确定. (当 A 选定以后，这样的直线可以有两条，一条或没有.)

9. (a) 作一正方形 $KLMN$，使得 K 在 AC 边上，MN 在底边 AB 上 (图 73). 若 L' 是直线 AL 与 BC 的交点，则以 A 为相似中心，系数 $k=AL'/AL$ 的中心相似把正方形 $KLMN$ 变成所求的正方形 $K'L'M'N'$.

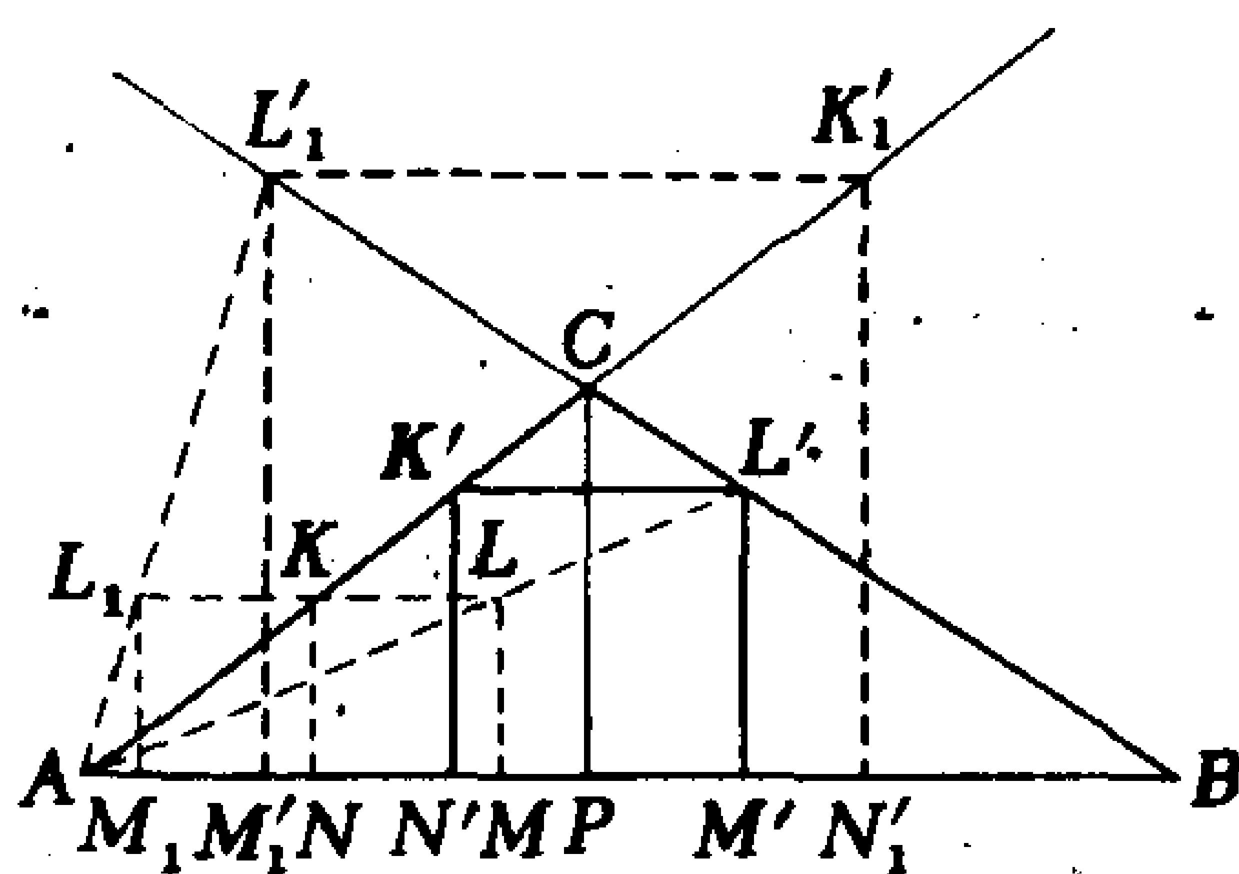


图 73

(若坚持要求所作正方形的所有顶点真正落在△ABC 的边上，而不是在它们的延长线上，那末，当角 A 和角 B 都小于 90° 或其中之一等于 90° 时，本题显然有唯一解；而当这两个角之一大于 90°时，本题无解. 如果我们允许正方形的顶点落在△ABC 的边的延长线上〔见问题 10 (c) 中的注〕，则一般说来本题有两个解，在图 73 中它们由两个正方形 $K'L'M'N'$ 和 $K'_1L'_1M'_1N'_1$ 表示. 仅当 $AL_1 /\!/ BC$ 时(用图 73 中的记号)本题有唯一解.)

(b) 作△LMN 使得它的边分别平行于 l_1, l_2, l_3，并且使得 L 在 BC 上，M 在 CA 上. 若 N' 是直线 CN 与 AB 的交点，则以 C 为中心，系数 $k=CN'/CN$ 的中心相似把△LMN 变成所求的 △$L'M'N'$ (图 74).

10. (a) 过 A 和 B 分别引平行于 l_3 和 l_4 的直线，设 O 是它们的交点. 过 O 引直线 l'_1 和 l'_2 分别平行于 l_1 和 l_2 (图 75). 选取

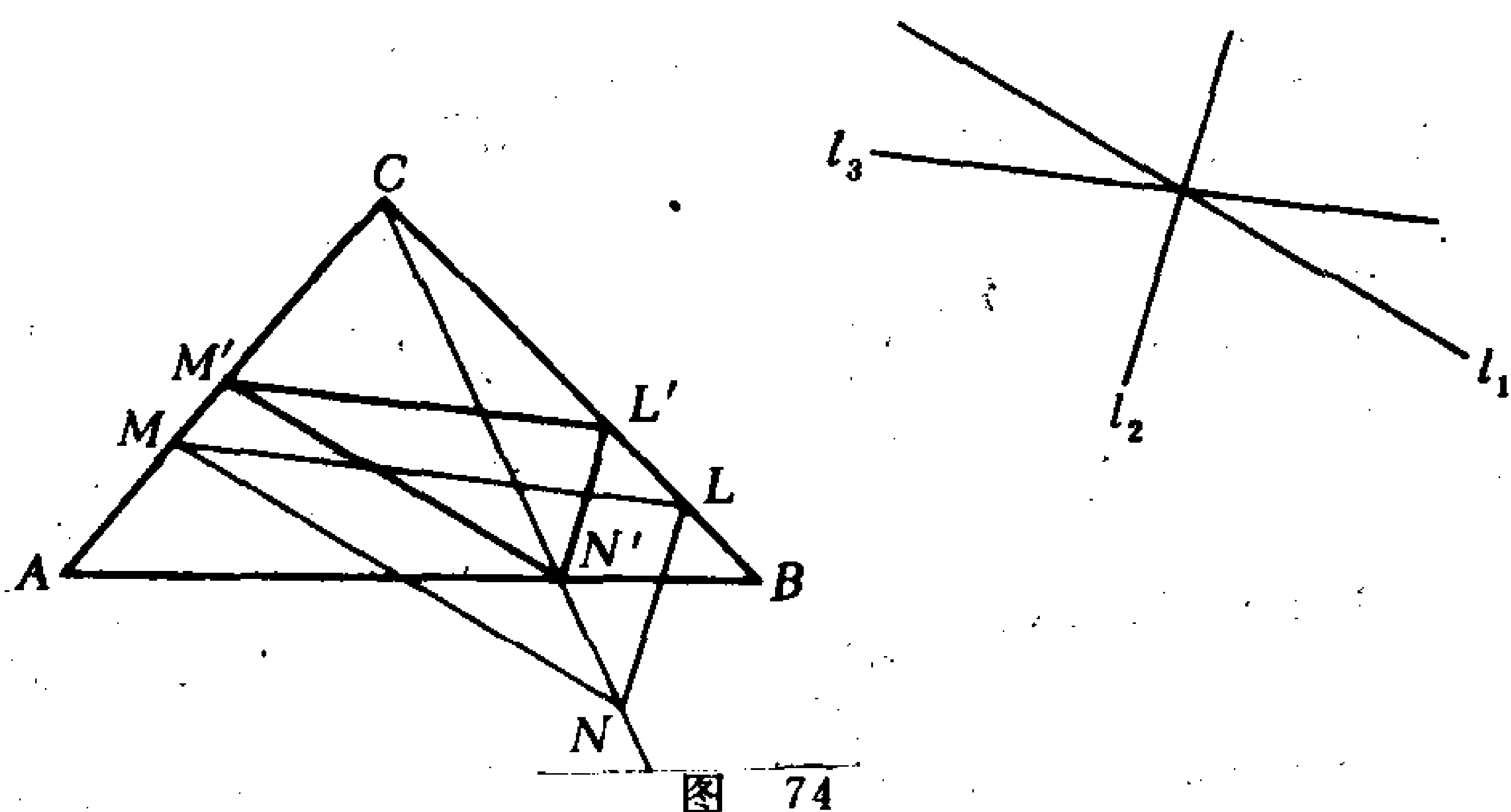


图 74

两对满足题中假设的点 M_1, M_2和N_1, N_2: M_1和N_1 在 l_1 上，M_2和N_2 在 l_2 上，并且 $AM_1/BM_2 = AN_1/BN_2 = m$.

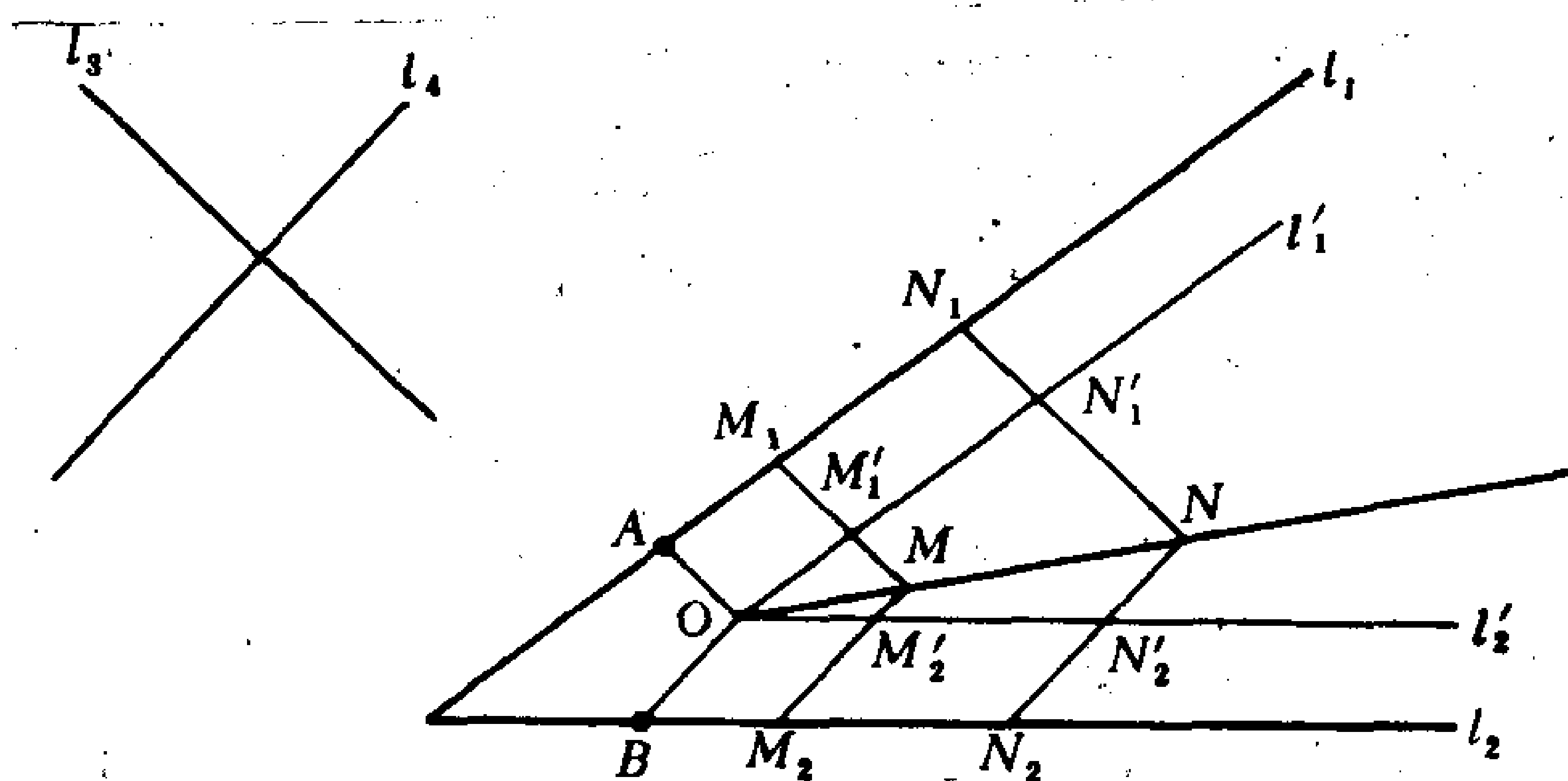


图 75

命 M_1', N_1' 分别是过 M_1, N_1 并且平行于 l_3 的直线和 l_1' 的交点；命 M_2', N_2' 分别是过 M_2, N_2 并且平行于 l_4 的直线和 l_2' 的交点. 于是有

$$\frac{OM_1'}{OM_2'}=\frac{ON_1'}{ON_2'}(=m) \quad 或 \quad \frac{OM_1'}{ON_1'}=\frac{OM_2'}{ON_2'}.$$

由此可知，直线 M_1M_1' 和 M_2M_2' 都以 O 为相似中心，分别与直

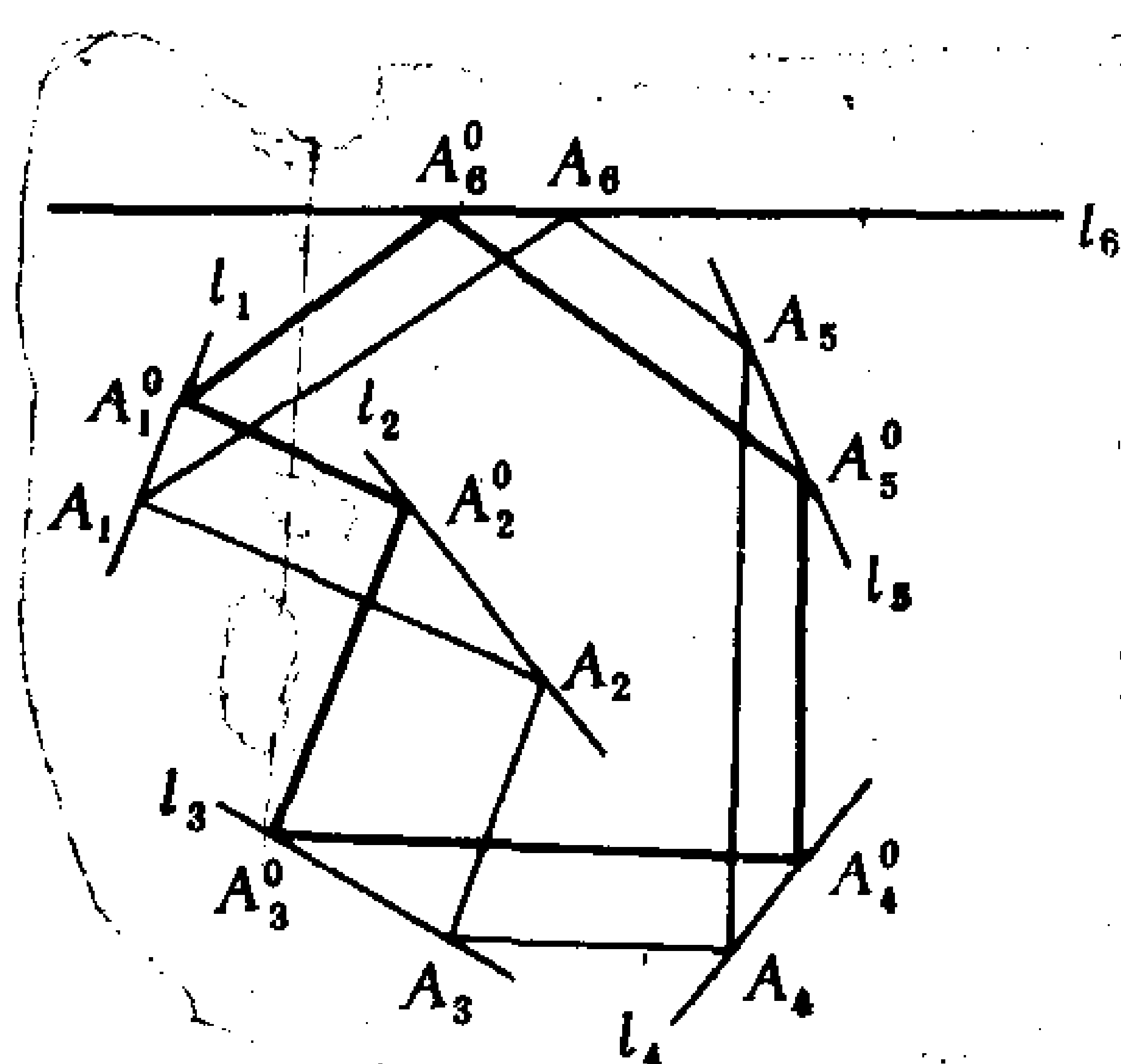


图 76

线 $N_1N'_1$ 和 $N_2N'_2$ 中心相似. 因而直线 $M_1M'_1$ 和 $M_2M'_2$ 的交点 M 以 O 为相似中心，与直线 $N_1N'_1$ 和 $N_2N'_2$ 的交点 N 中心相似；换句话说，所求轨迹上的任何两个点都落在过 O 的同一条直线上，因此所求的轨迹是一条直线. 为了作出这条直线，只须注意到它经过 O 和任意一个满足题中条件的点 M.

(b) 设 $A_1^0A_2^0\cdots A_n^0$ 是我们的多边形的某个固定位置（见图 76，这里 $n=6$）. 因为原多边形的边总平行于它们在 $A_1^0A_2^0\cdots A_n^0$ 中的对应边，并且顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 沿直线 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ 滑动，由此可知，比

$$\frac{A_1^0A_1}{A_2^0A_2}, \quad \frac{A_2^0A_2}{A_3^0A_3}, \quad \cdots, \quad \frac{A_{n-2}^0A_{n-2}}{A_{n-1}^0A_{n-1}}$$

都保持常值. 所以，比

$$\frac{A_1^0A_1}{A_{n-1}^0A_{n-1}} = \frac{A_1^0A_1}{A_2^0A_2} \cdot \frac{A_2^0A_2}{A_3^0A_3} \cdot \cdots \cdot \frac{A_{n-2}^0A_{n-2}}{A_{n-1}^0A_{n-1}}$$

也保持常值. 由(a)，这意味着 A_n 也在一直线 l_n 上移动.（直线 l_n 由顶点 A_n 的任意两个位置确定.）

(c) 命 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是给定多边形的边所在的直线. 在 l_1 上任取点 A_1，作一多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 使它的边平行于给定的直线，并且它的顶点 $A_2, \cdots, A_{n-1}$ 分别在直线 $l_2, \cdots, l_{n-1}$ 上. 如果这多边形的顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 沿直线 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ 以这样的方式滑动，使得它的边保持平行于给定的直线，则由(b)，顶点

A_n 也沿某直线 m 滑动，这直线由 A_n 的任意两个位置确定. 直线 m 与直线 l_n 的交点确定所求多边形 $\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$ 的顶点 $\bar{A}_n$ 的位置.

若 l_n 不平行于 m，则本题有唯一解；若 $l_n \parallel m$ 但 $l_n \neq m$，则本题无解；若 $l_n = m$ 则本题解不定.

11. 因为边 BC 的长度不变并且 B 不动，当铰链连接的平行四边形移动时，C 在以 B 为中心的某个圆上移动. 但是 Q 是由 C 经过以固定点 A 为中心，系数为 1/2 的中心相似变换得到的. 所以 Q 也在一个圆上移动，这个圆可以由 C 沿着它移动的那个圆经过上面所讲述的变换得到.

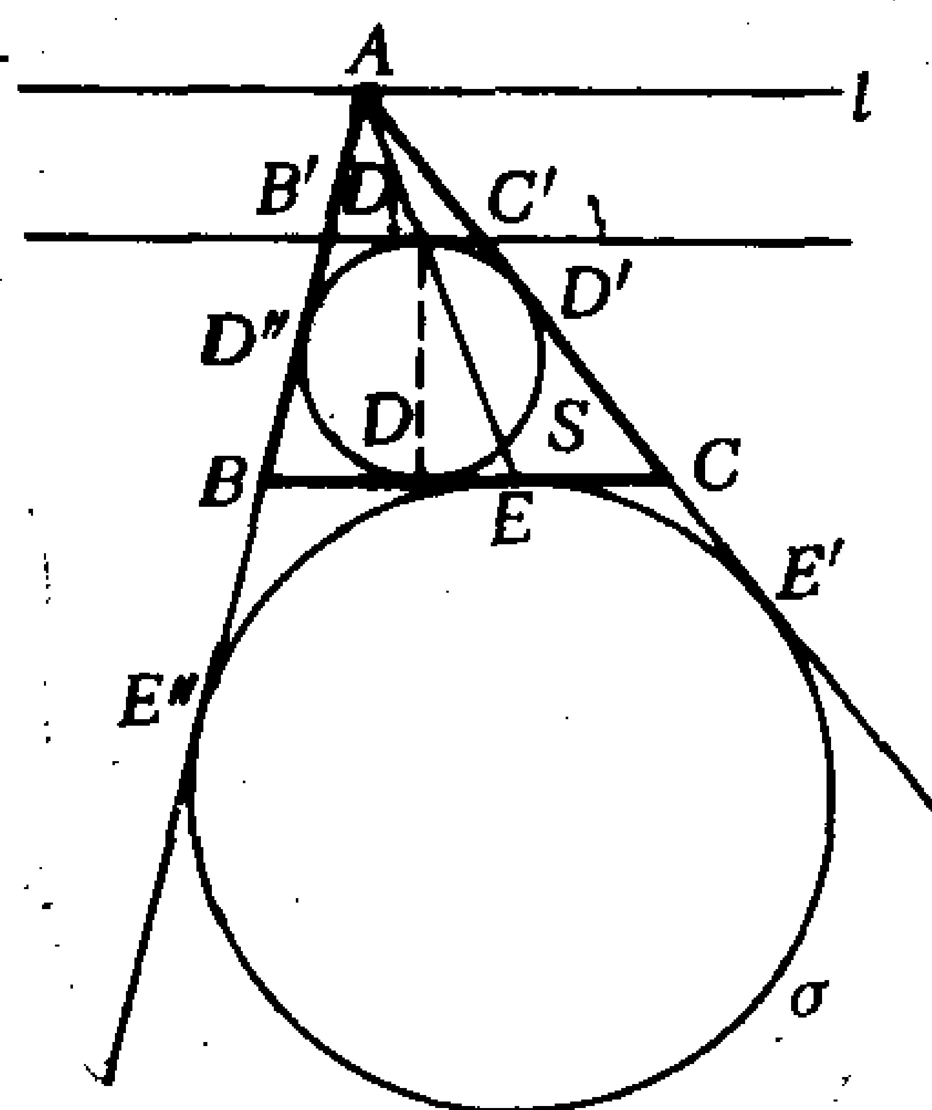


图 77

12. (a) 设 r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆 S 的半径，ρ 是傍切圆 σ 的半径（图 77）. 以 A 为中心，以 r/ρ 为系数的中心相似把 σ 变成 S，并且把在 E 点与 σ 相切的直线 BC 变成在 D_1 与 S 相切的直线 $B'C'$. 因 D_1 是由 E 经过以 A 为中心的中心相似得到的，所以直线 ED_1 过 A. 由于 S 的两条切线 BC 和 $B'C'$ 是平行的，所以它们与 S 的切点 D 和 D_1 必定是对径点. 这就证明了本题的断言.

(b) 设内切圆 S 与 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 分别切于 D, D', D''，傍切圆 σ 分别与这些边（或延长线）切于 E, E', E''（这里我们说的是与 $\triangle ABC$ 的边 BC 及其它两边延长线相切的

傍切圆，见图 77). 我们用 $BC=a, CA=b, AB=c$ 表示$\triangle ABC$ 的边. 由于从圆外一点向圆所引的两切线段有相同的长度. 因而有

$$CD+CD'=(a-BD)+(b-AD')$$
$$=a-BD''+b-AD''$$
$$=a+b-AB=a+b-c.$$

又因为 $CD=CD'$，我们有

$$CD=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

类似地，有

$$AE'+AE''=(b+CE')+(c+BE'')$$
$$=b+CE+c+BE$$
$$=b+c+BC=a+b+c.$$

因为 $AE'=AE''$，所以有

$$AE'=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

又

$$CE=CE'=AE'-AC=\frac{1}{2}(a+b+c)-b=\frac{1}{2}(a-b+c),$$

由此得到

$$ED=CD-CE=\frac{1}{2}(a+b-c)-\frac{1}{2}(a-b+c)=b-c.$$

为了从给定的量 r, h 和 $b-c$ 作出$\triangle ABC$，我们先作一直角三角形 EDD_1 (图 77)，使得它的两条直角边 $ED=b-c$ 和 $DD_1=2r$. 然后，以 DD_1 为直径作圆 S. 引直线 l 平行于 ED，并使它与 ED 距离等于 h. 直线 ED_1 与 l 的交点即为所求三角形的顶点 A. 三角形的另外两个顶点 B 和 C 是圆 S 的两条切线 AD''和 AD' 与 ED 的交点.

13. (a)若 $l_1 // l_2$，本题的解法是简单的. 若 l_1与l_2不平行，命 M 是它们的交点，考虑包含点 A 的角域 l_1Ml_2 . 在角 l_1Ml_2 中任作一内切圆 $\bar{S}$ 〔图 78 (a)〕. 命 B 是直线 MA 与圆 $\bar{S}$ 的交点. 所求的圆 S 以 M 为相似中心，以 MA/MB 为相似系数，中心相似于 $\bar{S}$. 在相似中心和相似系数已知的情况下，我们容易作出 S. 若 A 不在 l_1或l_2上，本题有两个解.

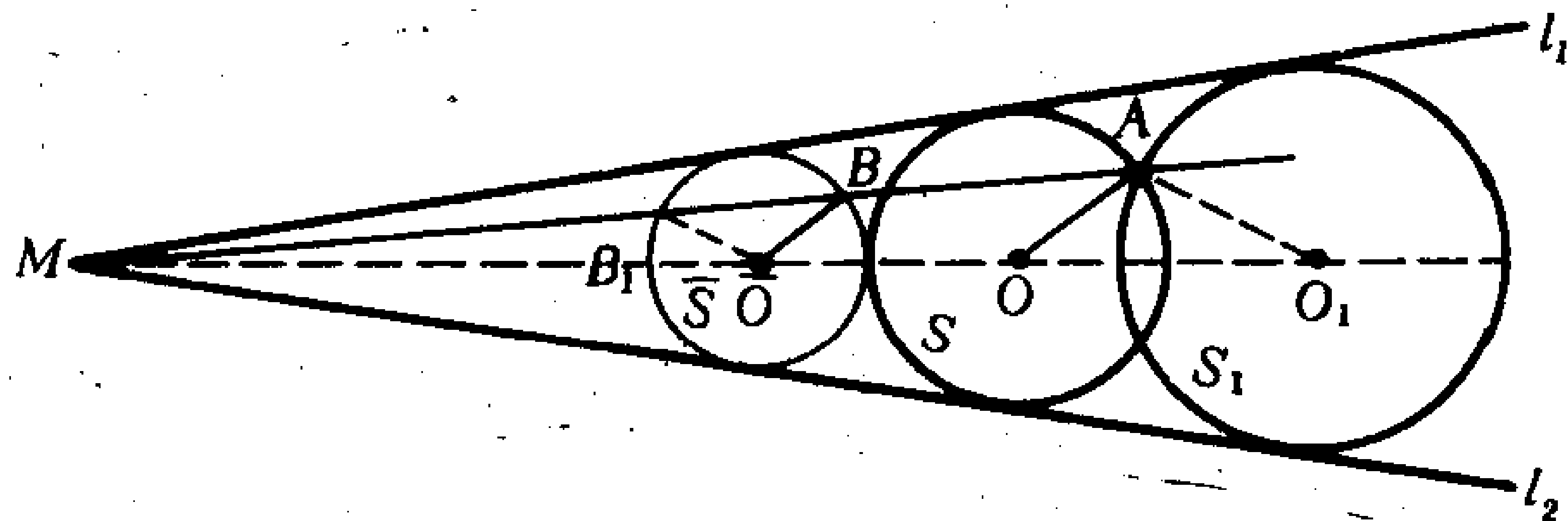


图 78(a)

(b) 命 m 是 AB 的中垂线，l' 是关于 m 对称于 l 的直线〔图 78 (b)〕. 所求的圆必定与直线 l' 相切. 于是把本题归结为问题(a)：作一个圆，使它与两给定直线 l 和 l' 相切，并且过给定点 A.

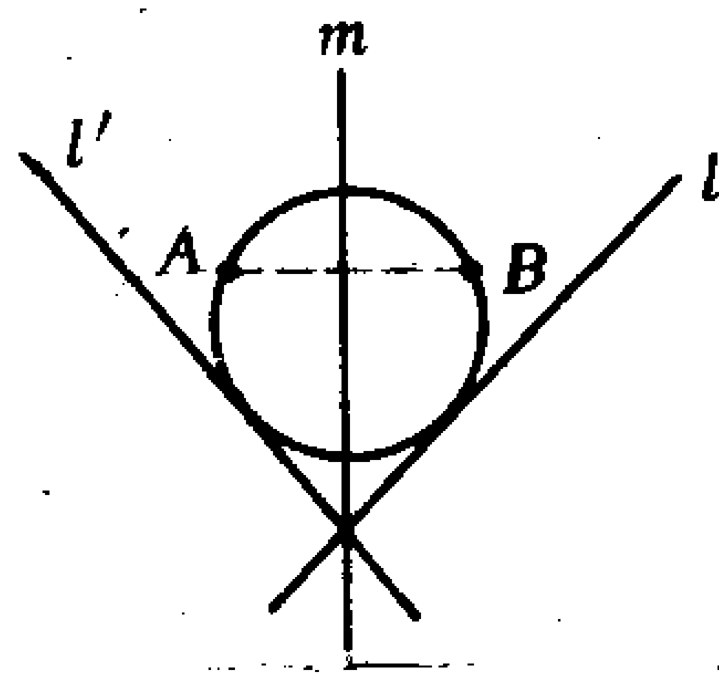


图 78(b)

(c) 用 M 表示直线 l_1与l_2 的交点，并设 S 是所求的圆〔图 79 (a)〕①. 圆 $\bar{S}$ 与 S 的切点 N 是它们的相似中心. 把 S 变成 $\bar{S}$ 的这个中心相似把直线 l_1和l_2 分别变为直线 $\bar{l}_1$和$\bar{l}_2$，这里 $\bar{l}_1 // l_1$，$\bar{l}_2 // l_2$，并且它们都与圆 $\bar{S}$ 相切. 点 M 变到 $\bar{l}_1$ 与 $\bar{l}_2$ 的交点 $\bar{M}$. 因此 N

① 若 $l_1 // l_2$，本题容易解，因为 S 的半径立即可以确定.

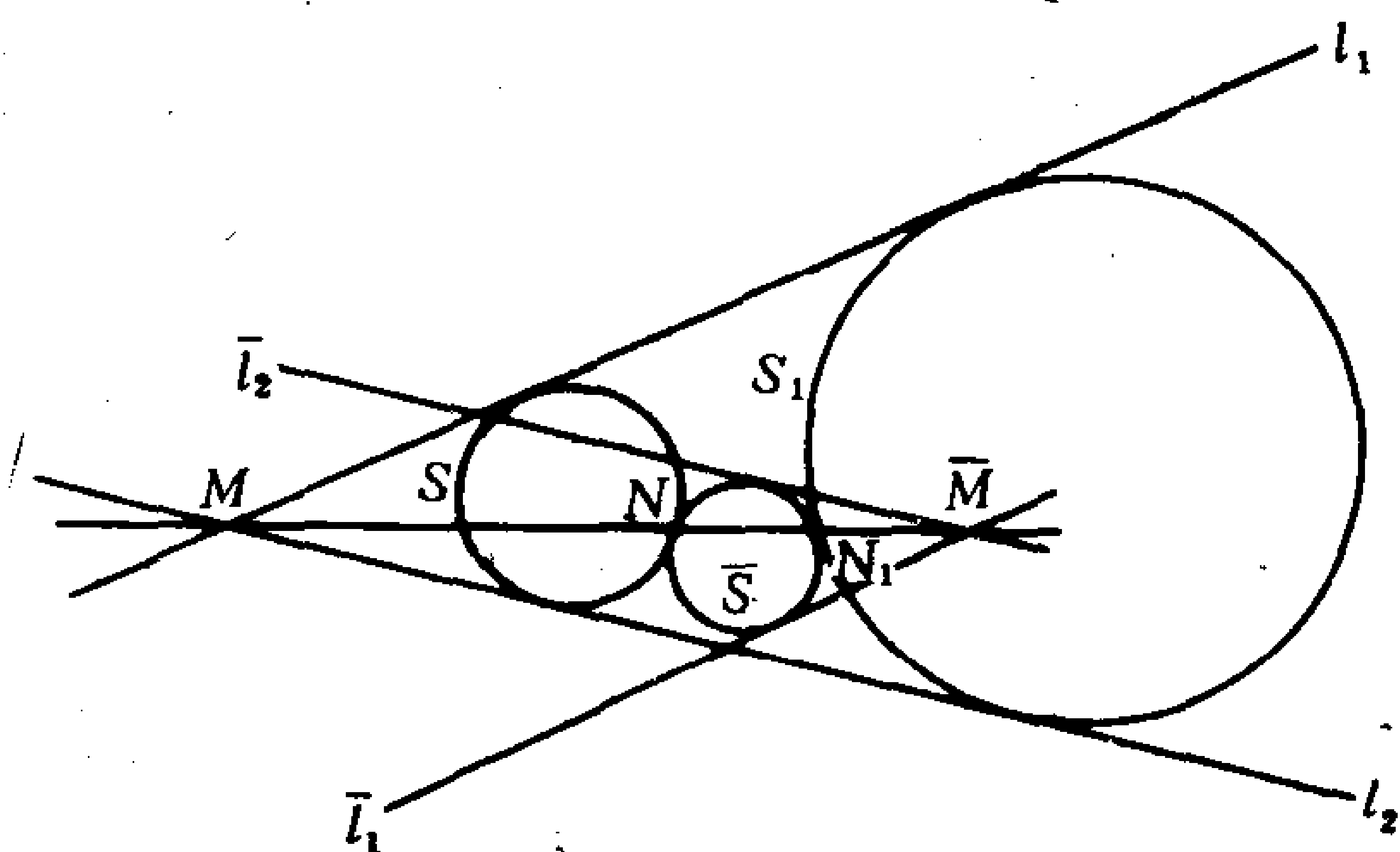


图 79(a)

可以作为直线 $M\bar{M}$ 与圆 $\bar{S}$ 的交点被定出. 随后 S 容易作出（以 N 为中心，把 $\bar{l}_1$ 变为 l_1 的中心相似也把 $\bar{S}$ 变成 S). 直线 $\bar{l}_1$与$\bar{l}_2$各有两种选取方式，连接 M 到 $\bar{l}_1$和$\bar{l}_2$的交点的直线可以与圆 $\bar{S}$ 交于两点. 因此本题可多到 8 个解〔例如，见图 79(b)〕.

14. (a) 根据中线的一个熟知的性质，由$\triangle ABC$ 各边中点连线所构成的 $\triangle A'B'C'$，以 M（$\triangle ABC$ 的重心）为相似中心，$-1/2$ 为相似系数，中心相似于$\triangle ABC$〔图 80 (a)〕. $\triangle ABC$ 的高 AD, BE, CF 对应于 $\triangle A'B'C'$ 的高 $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$, 并且$\triangle ABC$ 高的交点（垂心）H 对应于 $\triangle A'B'C'$ 高的交点，即点 O（因为 $\triangle A'B'C'$ 的高分别是$\triangle ABC$ 各边的中垂线). 因此点 H 和 O 以 M 为中心，以 $-1/2$ 为相似系数中心相似，即它们在过 M 的同一直线上，且 M 分线段 OH 成 $HM/MO=2$.

(b) 本题的证明类似于 (a) 的证明，并且基于这样的事实：过三角形 ABC 各边中点，且平行于这些边所对角的平分线的直线都以 M 为相似中心，$-1/2$ 为相似系数分别中心相似于三角形 ABC 各角的平分线〔图 80 (b)〕. 所以这些直线交

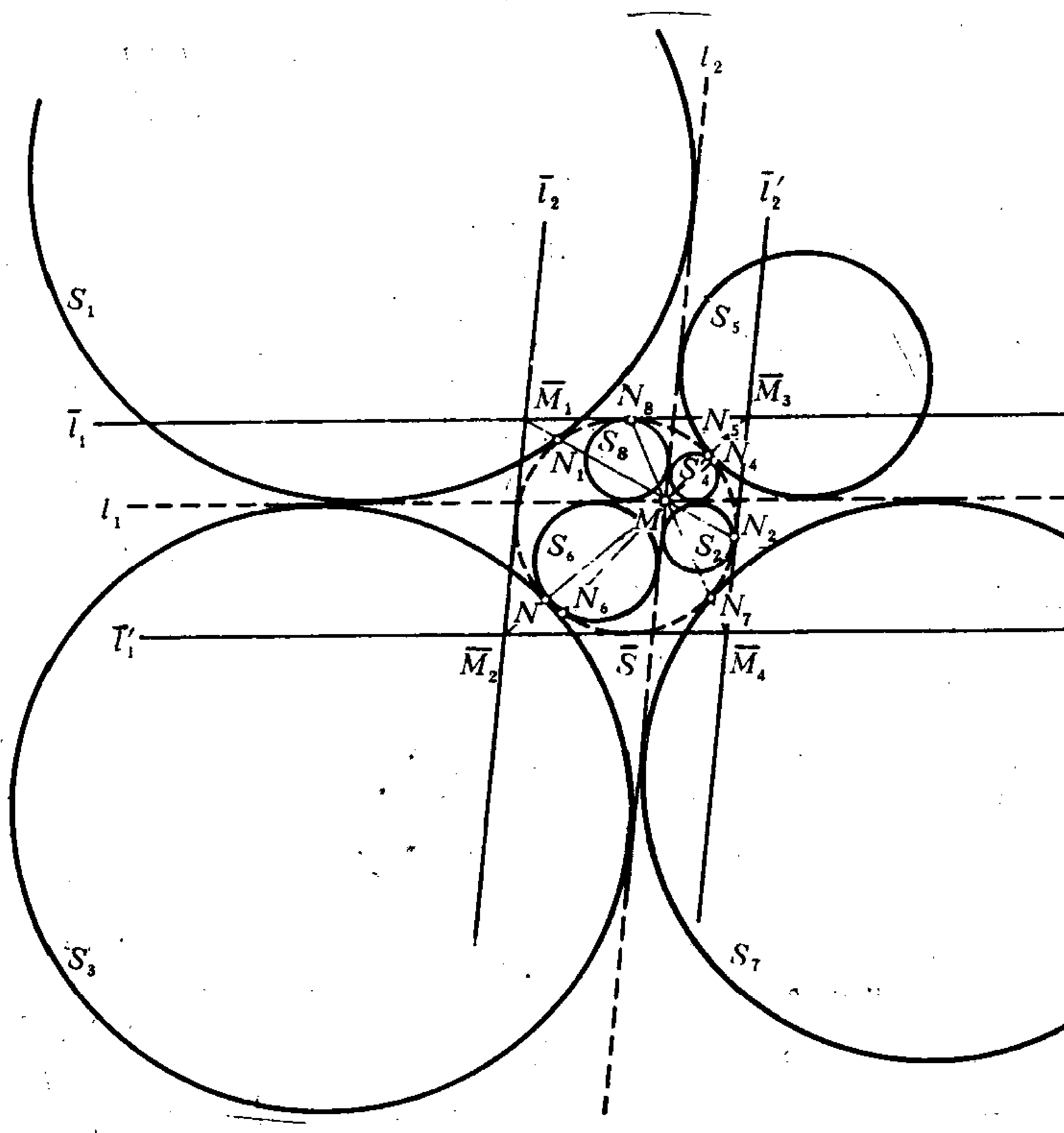


图 79(b)

于一点 K.(K 是三角形 ABC 角平分线的交点 Z 的像.)

(c) 命 A' , B' , C' 是△ABC 各边的中点; K_1,K_2, K 是角 A 内的傍切圆与△ABC 各边的切点; P, Q, R 是内切圆与各边的切点(图 81). 我们来证明 $AK // ZA'$. 用 a,b,c 表示△ABC 的各边,$2p$ 表示周长, h_a 表示 BC 边上的高 $A\bar{P}$,r 表示内切圆半

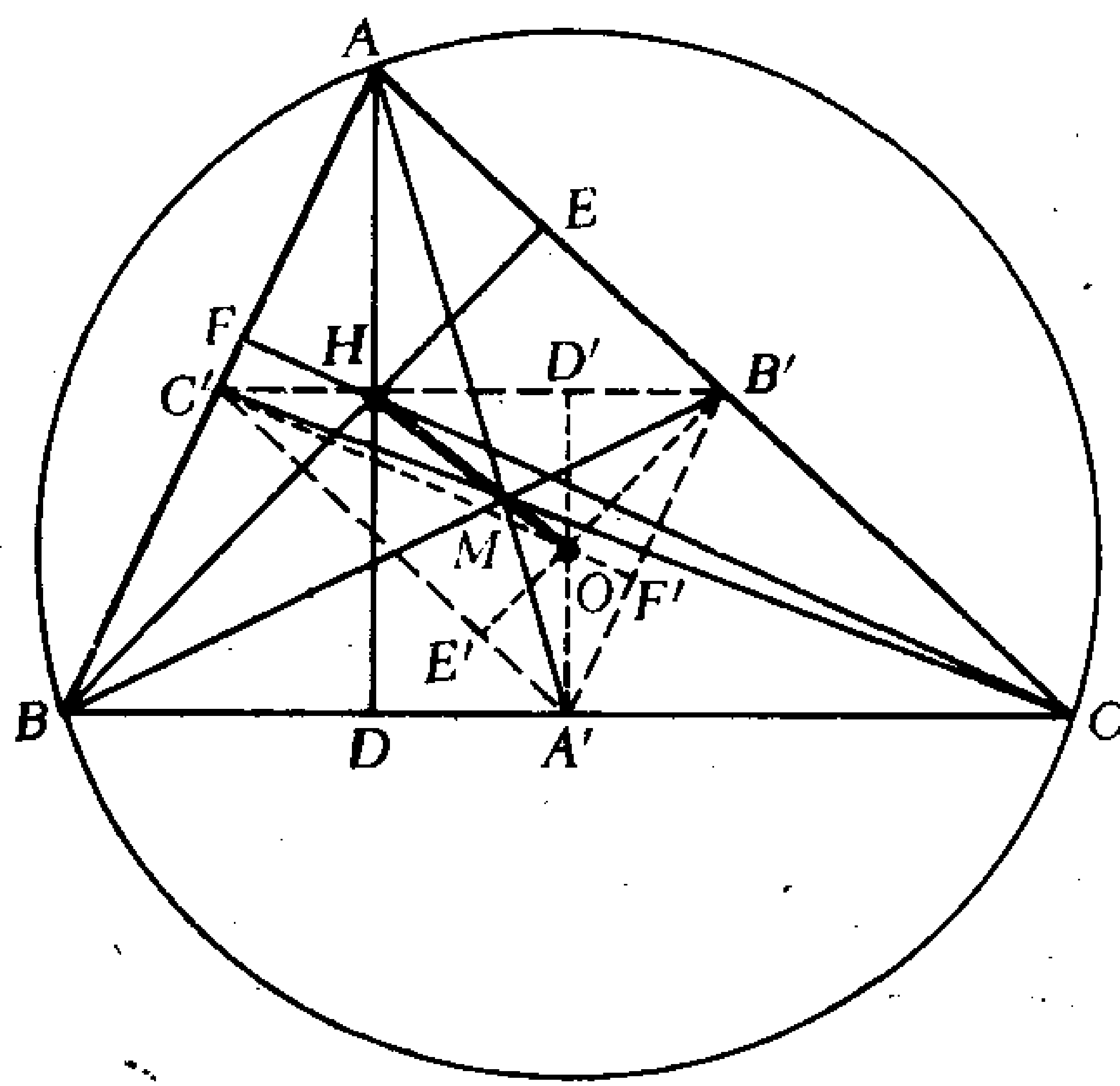


图 80(a)

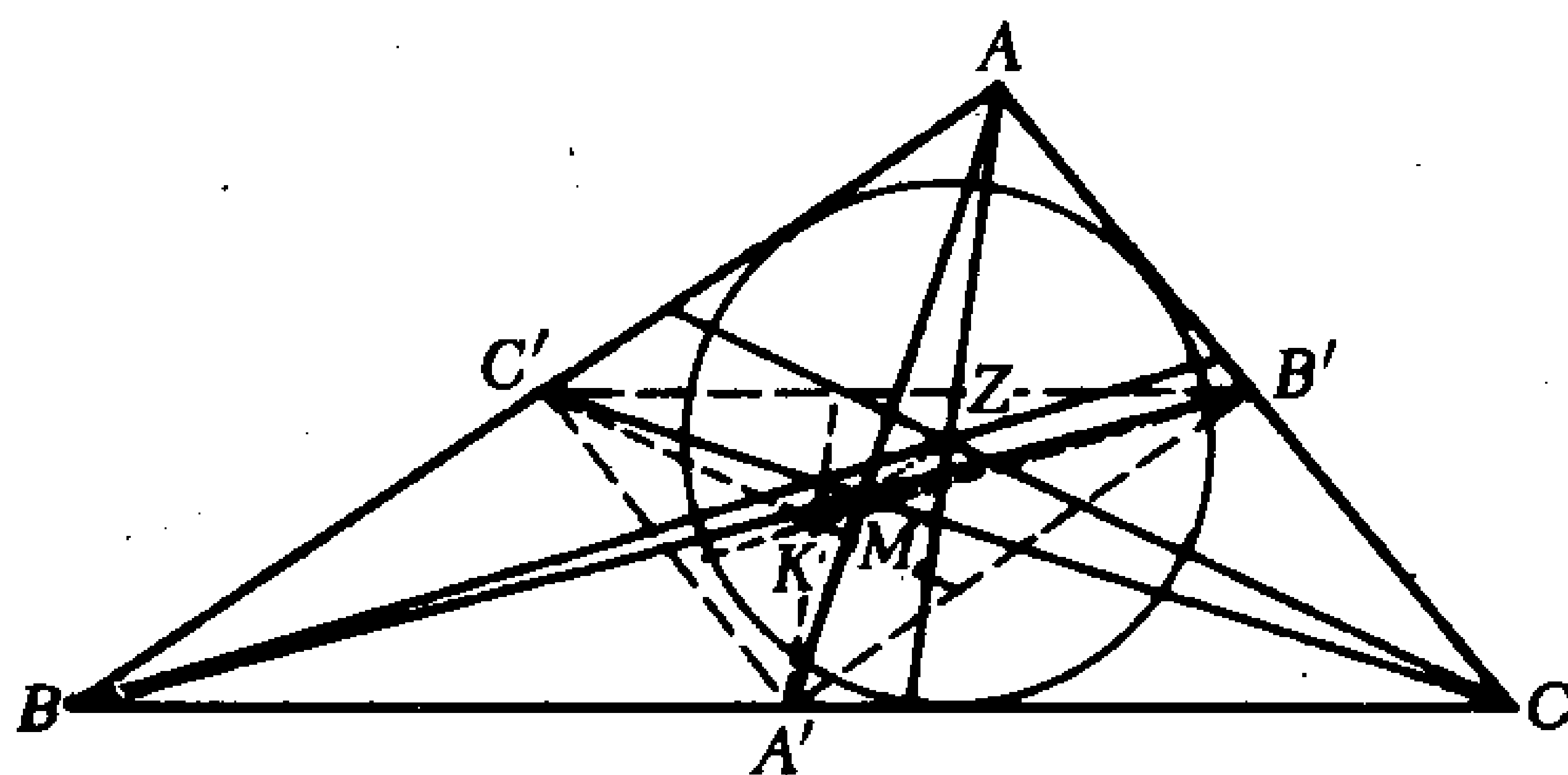


图 80(b)

径，S 表示三角形的面积. 因为 $ah_a = 2pr(=2S)$，我们有 $h_a/r = 2p/a$，所以

$$\frac{A\overline{P}}{ZP} = \frac{2p}{a}.$$

我们将证明 $K\overline{P}/A'P$ 等于这个数.

事实上，由 $b^2 = a^2 + c^2 - 2aB\overline{P}$ 有

$$B\overline{P} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a};$$

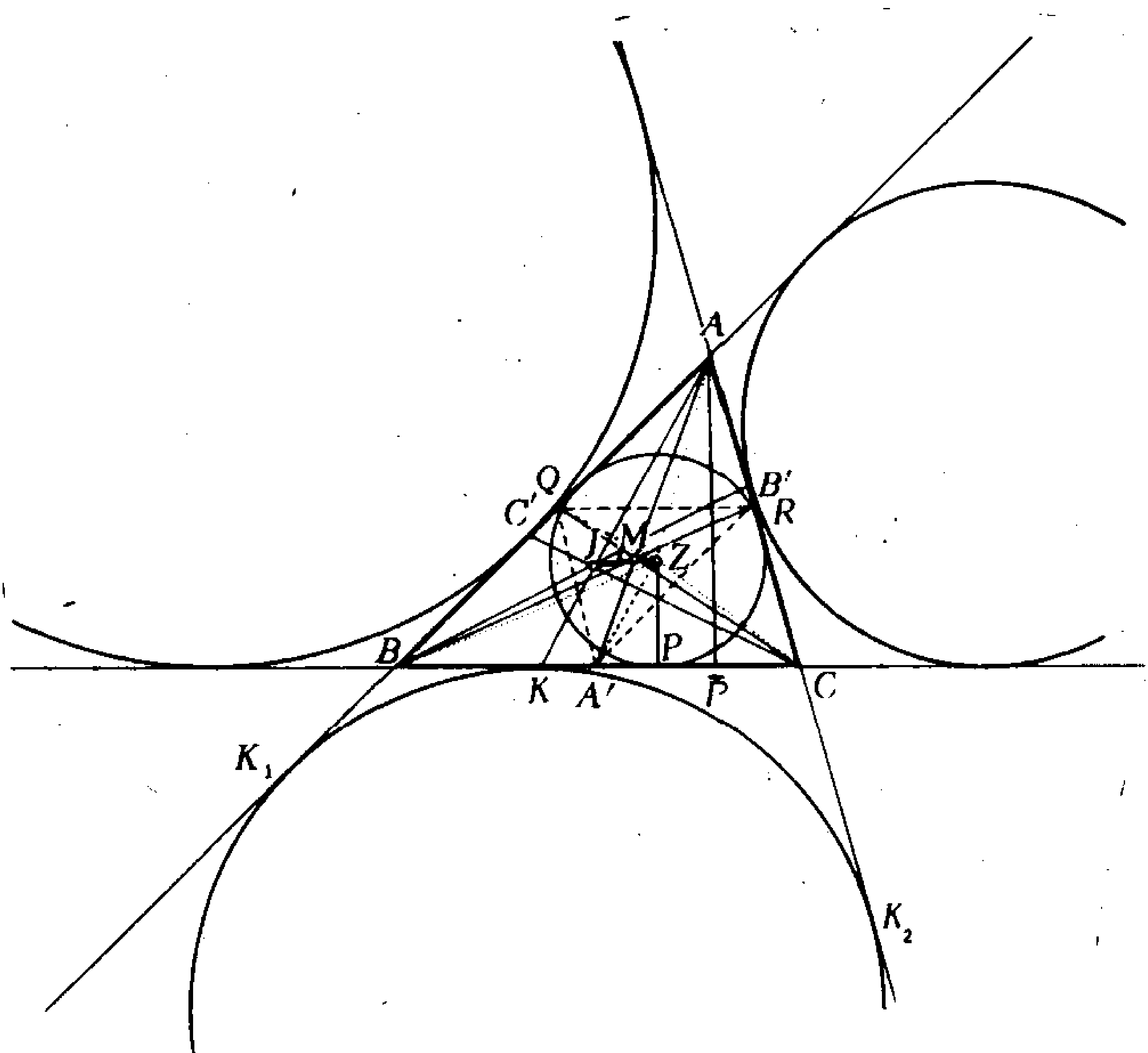


图 81

另一方面,由

$$AK_1=\frac{1}{2}(AK_1+AK_2)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BK_1+AC+CK_2)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BK+AC+CK)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)=p,$$

有

$$BK=BK_1=AK_1-AB=p-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

因此(如在图 81 中所表示的情形)有

$$K\bar{P}=B\bar{P}-BK=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}-\frac{a+b-c}{2}$$

$$=\frac{a^2+c^2-b^2-a^2-ab+ac}{2a}$$

$$=\frac{(c-b)(c+b+a)}{2a}=\frac{p(c-b)}{a}.$$

又由于

$$BP=\frac{1}{2}(BP+BQ)=\frac{1}{2}(BC-CP+BA-AQ)$$

$$=\frac{1}{2}(BC+BA-CR-AR)=\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b,$$

因而

$$A'P=BP-BA'=p-b-\frac{a}{2}=\frac{c-b}{2}.$$

于是我们有

$$\frac{K\bar{P}}{A'P}=\frac{p(c-b)}{a}\Big/\frac{c-b}{2}=\frac{2p}{a}=\frac{A\bar{P}}{ZP}.$$

因此 $\triangle A\bar{P}K$ 与 $\triangle ZPA'$ 相似，从而直线 AK 与 ZA' 平行.

进一步，用与前面问题的解法完全类似的方法可以证明，过 $\triangle ABC$ 的顶点并且平行于 $A'Z$, $B'Z$, $C'Z$ 的直线（如我们已指出的，它们是连接三角形顶点到它的对边与傍切圆的切点的直线）交于一点 J，这点 J 以 M 为相似中心，以 -2 为相似系数中心相似于 Z.

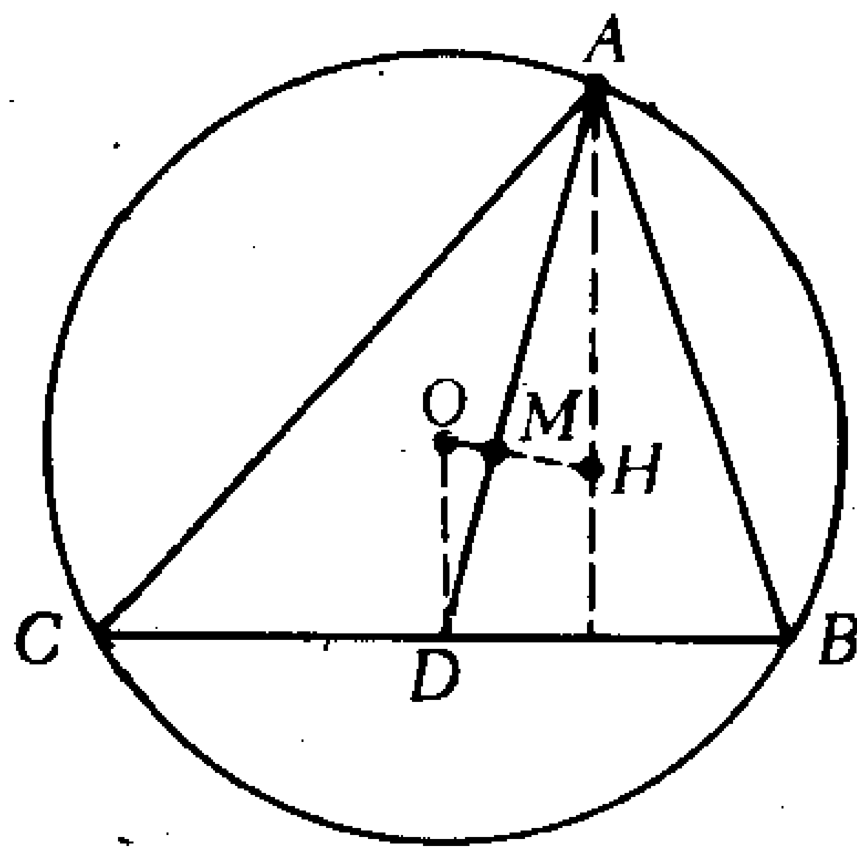


图 82

15. 命 O 是所求三角形 ABC 的

外接圆 S 的中心(图 82). 由问题 14(a)的结果, 这三角形的重心 M 在线段 OH 上, 并且分这线段成比 $OM : MH = 1 : 2$, 于是 M 可以作出. 进一步, 由于点 M 分△ABC 的中线 AD 成比 $AM : MD = 2 : 1$, 我们可以作出边 BC 的中点 D. 现在联结 D 与圆 S 的中心 O. 因为 OD 平分圆 S 的弦 BC, 可见 $OD \perp BC$. 所以我们可以作弦 $BC \perp OD$, 这就完成了△ABC 的作图.

16. 首先注意, 内接于圆 S 的△ABC 中线的交点在△ABC 内, 因而也在圆 S 内. 另一方面, 对 S 内的任一点 M, 我们可以在 S 中作一内接三角形 ABC, 使它以 M 为重心. 为此只须在过 M 的直径 AA_1 上取一点 D (这里 $AM \leqslant MA_1$), 使得 $AM : MD = 2 : 1$ (图 83), 然后过 D 作圆 S 的弦 BC, 使 $BC \perp OD$. 这样一来, 内接于圆 S 的所有三角形的重心的轨迹正好是由 S 内所有的点组成的集合 k〔图 84(a)〕.

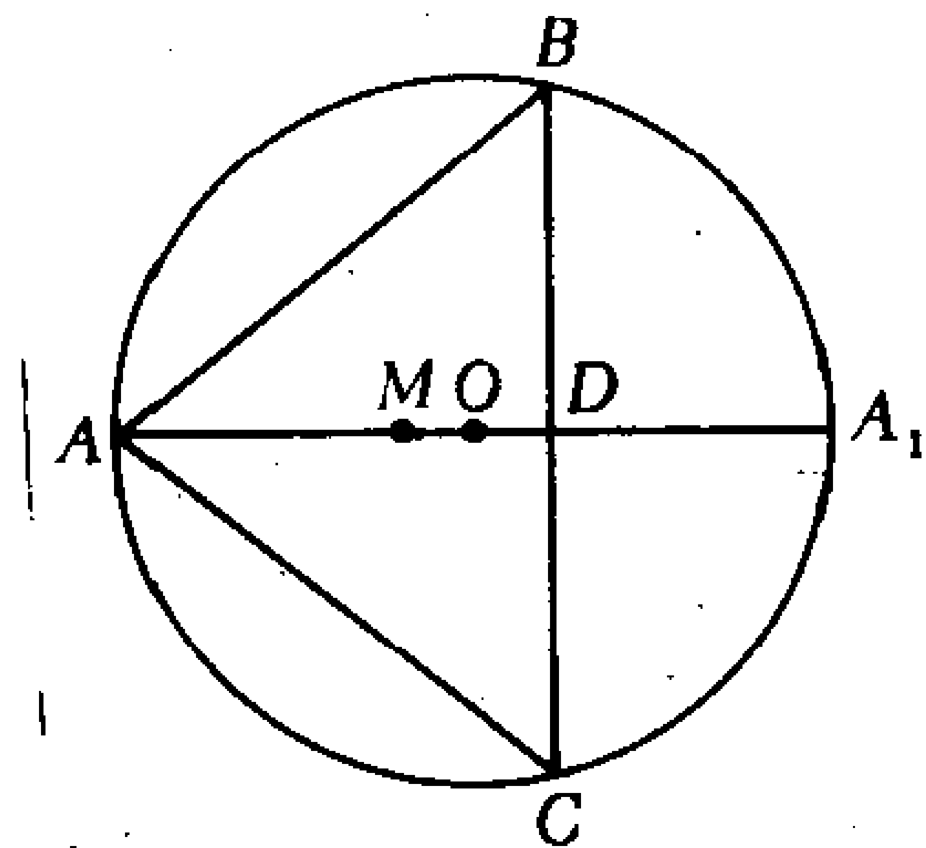


图 83

由问题 14(a) 的结果, 若 H 是中心在 O 的圆 S 的内接三角形 ABC 的垂心, M 是这三角形的重心, 则 $OH : OM = 3 : 1$. 由此可知, 内接于圆 S 的所有三角形的垂心的轨迹正好是由圆 Σ 内所有的点构成的集合 K, 这里 Σ 是一个与 S 同心, 并且半径等于 S 的半径三倍的圆〔图 84(b)〕.

剩下仅须指出锐角三角形 ABC 的垂心在三角形内, 因而在圆 S 内〔图 85 (a)〕; 内接于 S 并且角 A 为直角的三角形 ABC 的垂心与 A 重合, 所以在 S 上〔图 85 (b)〕; 最后, 内接于 S 的并且角 A 为钝角的三角形 ABC 的垂心在高 AP 的延长线

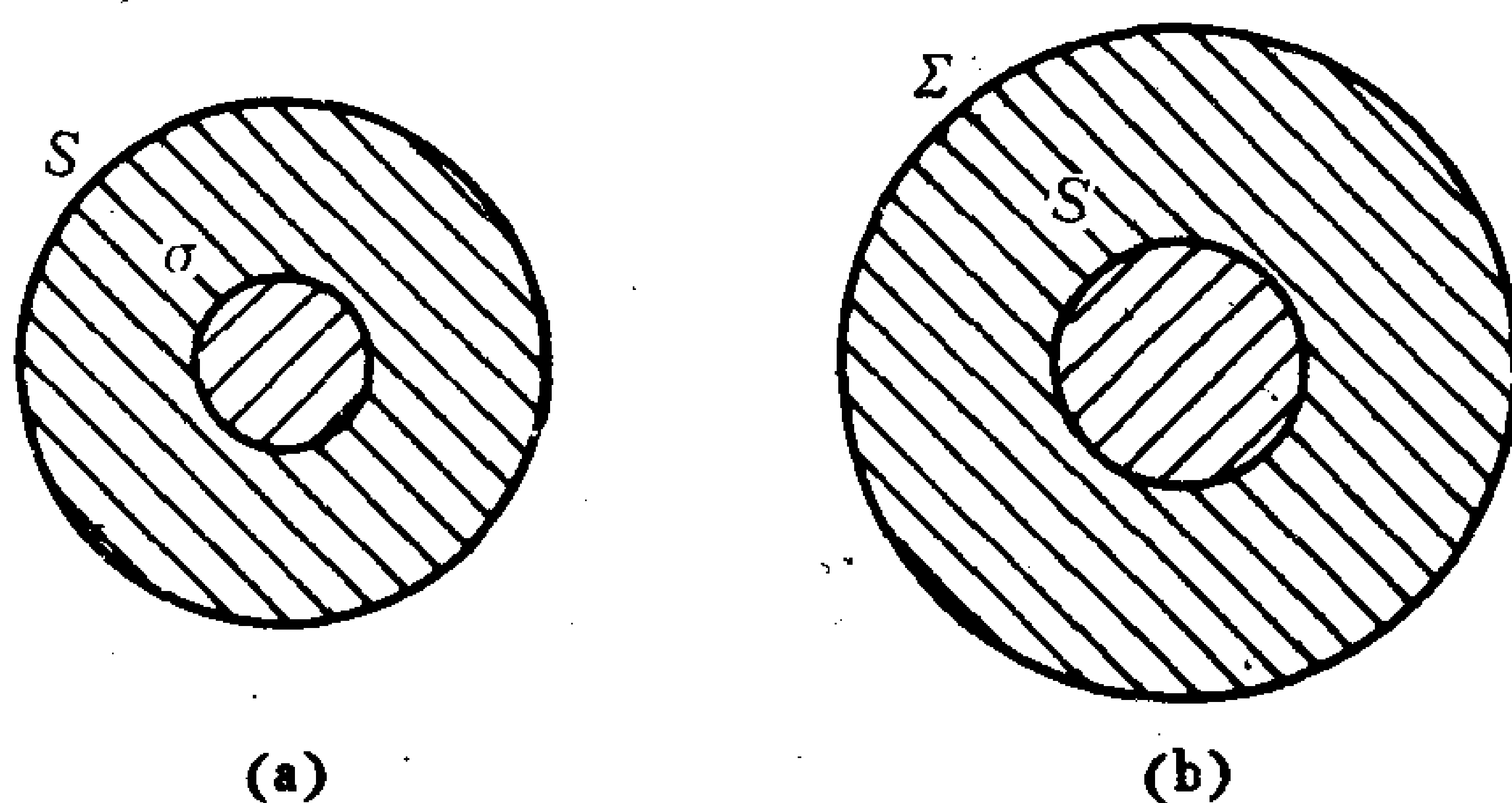


图 84

上，因而在 S 的外面〔图 85 (c)〕. 所以，全体内接于 S 的锐角

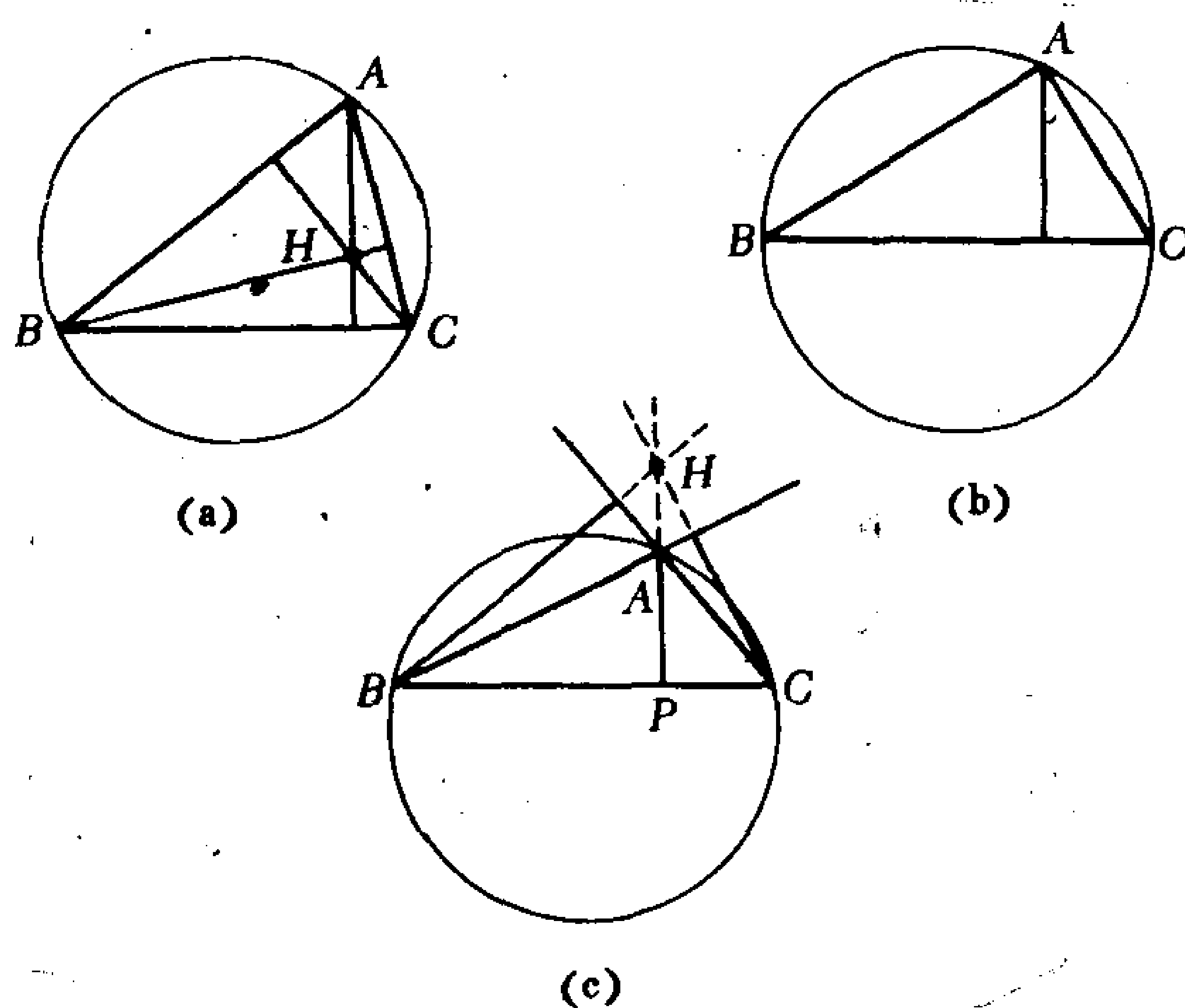


图 85

三角形的垂心的轨迹与 S 的全体内点所成的集合 κ 一致；内接于 S 的全体直角三角形的垂心的轨迹是圆 S；内接于 S 的全体钝角三角形的垂心的轨迹是同心圆 S 与 Σ 之间的环形

区域内的全体点组成的集合〔图 84(b)〕.

最后，因内接于 S 的$\triangle ABC$ 的重心可由垂心经过相似中心在 S 的中心 O，系数为 1/3 的中心相似得到，可见所有内接于 S 的锐角三角形的重心的轨迹与圆 σ 内的全体点所成的集合 κ 一致，这里 σ 与 S 同心，并且半径等于 S 半径的 1/3. 同理，所有内接于 S 的直角三角形重心的轨迹是圆 σ，而全体内接于 S 的钝角三角形重心的轨迹是 σ 与 S 之间的环形区域中的全体点组成的集合〔图 84(a)〕.

17. (a) 命 AP, BQ, CR 表示$\triangle ABC$ 的高；A', B', C' 表示$\triangle ABC$ 的各边的中点；D, E, F 表示线段 HA, HB, HC 的中点〔图 86(a)〕. 显然，D, E, F 在圆 $\bar{S}$ 上. 我们现在证明点 P, Q, R 也在这个圆上.

延长高 AP 直到它与 S 交于点 P_1，联结P_1 和 B. 在直角三角形 APC 和 BQC 中，

$$\angle CBQ = \angle CAP (= 90° - \angle BCA).$$

又因为 $\angle CAP = \angle CBP_1$（因为它们对同一段弧）. 所以有 $\angle HBP = \angle PBP_1$，故$\triangle HBP_1$ 是等腰三角形，且 $HP = HP_1/2$. 因此，经过以 H 为中心，以 1/2 为系数的中心相似，点 P_1 变到点 P. 同样可以证明 Q, R 也以 H 为中心，以 1/2 为系数分别中心相似于外接圆上的某两点.

进一步，显然点 A', B', C' 在以 M 为相似中心，以 $-1/2$ 为系数中心相似于 S 的圆 S' 上. 我们来证明 S' 与 $\bar{S}$ 重合. $\bar{S}$ 的半径等于 $r/2$（这里 r 是 S 的半径），它的中心 $\bar{O}$ 在线段 HO 的中点（O 是 S 的中心）〔图 86(a)〕. 圆 S' 的半径也等于 $r/2$，它的中心 O' 在直线 OM 上，并且使得 $MO'/MO = -1/2$. 由问题 14(a)的结论，点 O, H, M 在一直线上，且 $HM = 2MO$. 由此

立即得知，点 $\bar{O}$ 与 O' 重合，即圆 $\bar{S}$ 与 S' 重合，这就完成了证明.

我们还注意到，A' 与 D，B' 与 E，C' 与 F 是欧拉圆上的对径点（因为这圆的弦 $A'D$ 所对的圆周角 $A'PD$ 是直角）. 所以 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle DEF$ 关于欧拉圆的中心是对称的，因而它们全等.

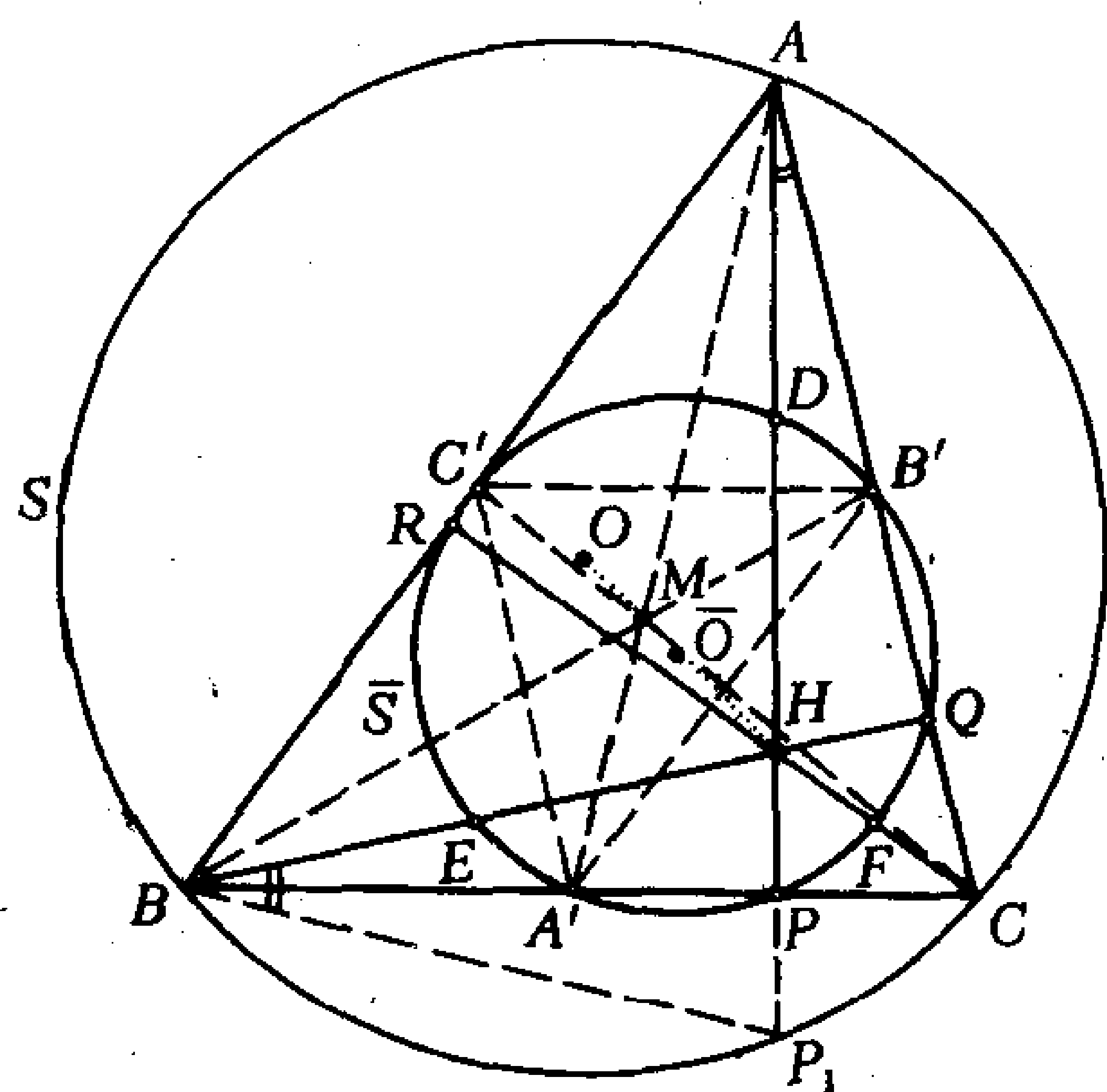


图 86(a)

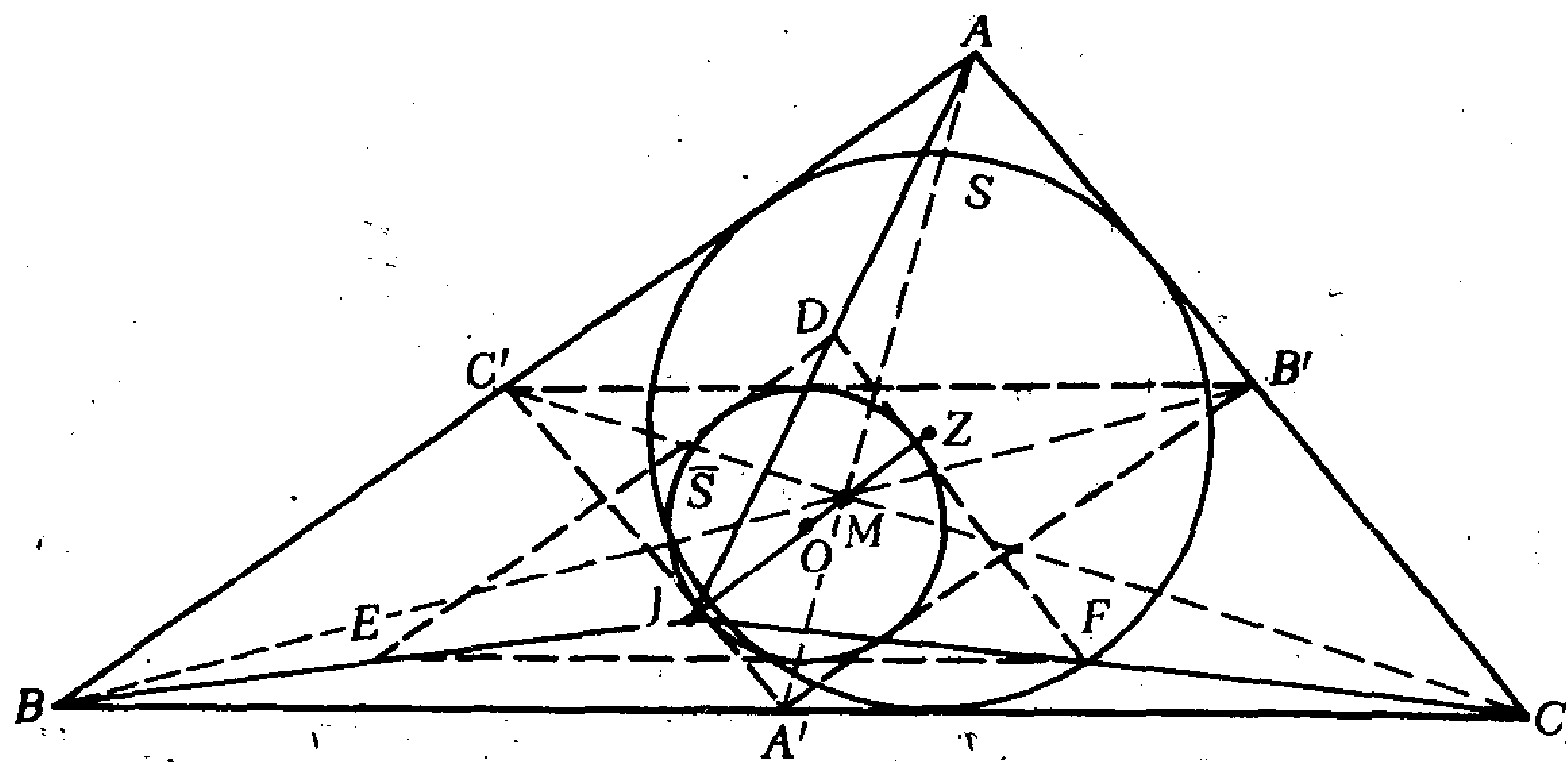


图 86(b)

(b) 首先，$\triangle DEF$ 显然以 J 为相似中心，以 1/2 为系数中心相似于 $\triangle ABC$〔图 86 (b)〕. 由此可知，$\triangle DEF$ 的内切圆 $\bar{S}$

以 J 为相似中心，以 1/2 为相似系数，中心相似于$\triangle ABC$ 的内切圆 S. 另外，$\triangle A'B'C'$ 的内切圆 S' 是以 M 为相似中心，以 $-1/2$ 为系数中心相似于圆 S 的. 所以圆 S' 的中心 O' 在直线 MZ 上，并且使 $MO'/MZ=-1/2$〔参看 (a) 的解〕. 由问题 14 (c) 的结论，线段 JZ 的中点 O(即圆 $\bar{S}$ 的中心)与圆 S' 的中心重合. 所以 $\bar{S}$ 与 S' 重合. 这就是所要证的.

还应注意，直线 $A'B'$ 和 DE，$B'C'$ 和 EF，$C'A'$ 和 FD 都在对径点与 $\bar{S}$ 相切(因为 $A'B'//AB//DE$，$B'C'//BC//EF$，$C'A'//CA//FD$)，因而$\triangle DEF$ 与$\triangle A'B'C'$ 关于 $\bar{S}$ 的中心是对称的，所以它们全等.

18. (a) 命 $A_1A_2A_3A_4$ 是任意四边形，M_4，M_3，M_2，M_1 分别是 $\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_2A_3A_4$ 的重心〔图 87 (a)〕. 为证线段 A_1M_1，A_2M_2，A_3M_3，A_4M_4 交于一点，只须证明这些线段中的任何两条都被它们的交点分成 3 : 1. 设 N 是 A_1M_1 和 A_2M_2 的交点，L 是 A_3A_4 的中点，则有

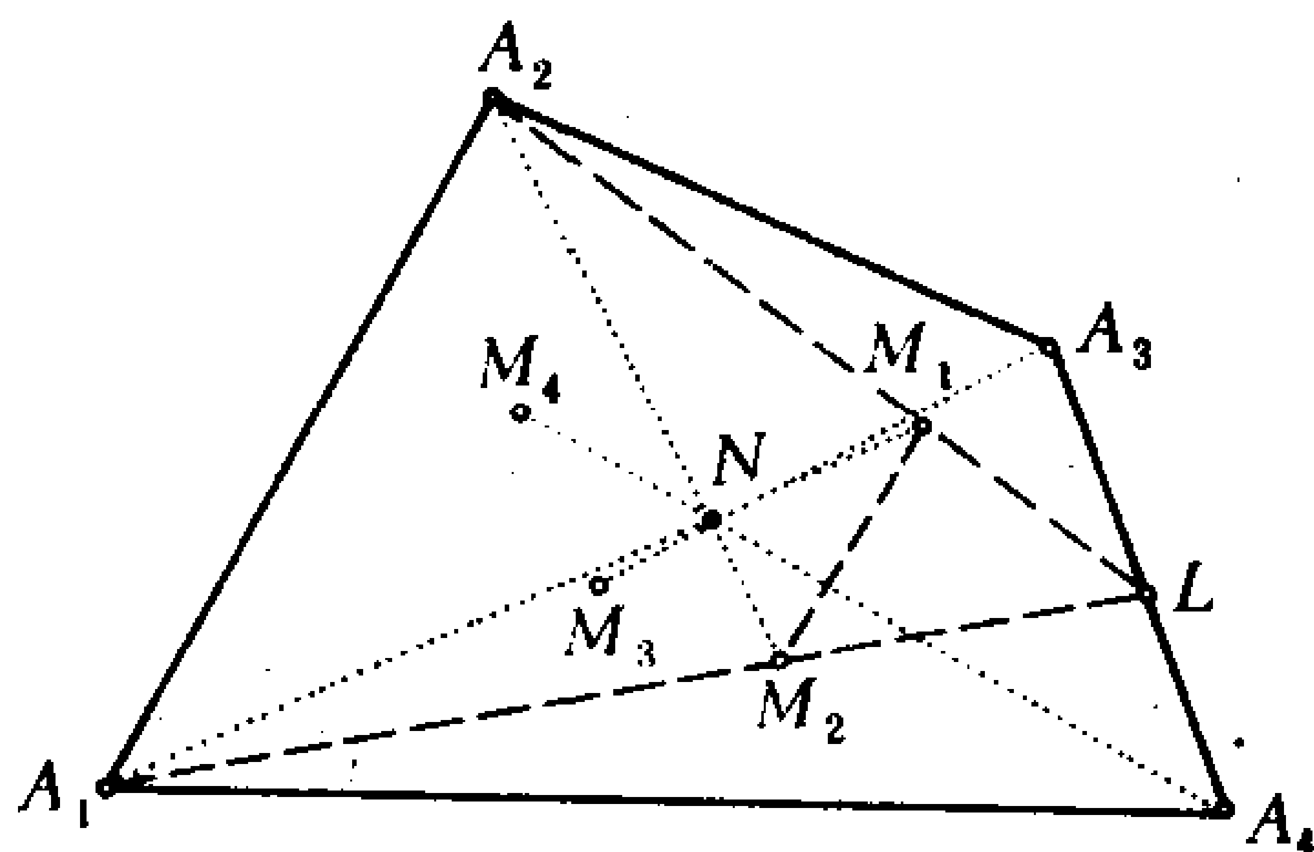


图 87(a)

$$A_1M_2/M_2L=A_2M_1/M_1L=2/1.$$

所以 $\triangle A_1LA_2$ 与$\triangle M_2LM_1$ 相似，因为我们有 $M_2M_1//A_1A_2$，$A_1A_2/M_2M_1=3/1$. 现我们知道 $\triangle A_1NA_2$ 与$\triangle M_1NM_2$ 是相似的，所以有 $A_1N/NM_1=A_2N/NM_2=3/1$. 这就是所要证的.

用类似的方法可以证明这个定理对任意 n 边形成立. 例

如，若 N_1 和 N_2 是四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 和 $A_1A_3A_4A_5$ 的形心，M 是△ $A_3A_4A_5$ 的形心，P 是 A_1N_1 和 A_2N_2 的交点〔图 87 (b)〕，于是有 $A_1N_2/N_2M=A_2N_1/N_1M=3/1$. 所以 $\triangle A_1MA_2$ 与 $\triangle N_2MN_1$ 相似，故有 $N_2N_1 /\!/ A_1A_2$ 且 $A_1A_2/N_2N_1=4/1$. 由此可知，$\triangle A_1PA_2$ 与 $\triangle N_1PN_2$ 相似，并且

$$A_1P/PN_1=A_2P/PN_2=4/1.$$

这样，任意两条连接五边形的顶点到剩下四个顶点所张的四边形的形心的线段，被它们的交点分成 4∶1. 由此立即推得定理对五边形成立.

(b)，

(c) 由 (a) 可知，以圆 S 的内接四边形顶点为顶点的四个三角形的重心落在半径为 $R/3$ 的圆 S' 上. 由问题 17 (a) 的结果可以知道，这些三角形的欧拉圆的圆心以圆 S 的中心 O 为相似中心，以 3/2 为相似系数，中心相似于这些三角形的重心. 所以这些欧拉圆的中心在半径等于$(R/3)(3/2)=R/2$ 的圆 $\bar{S}$ 上，由此推得(b)的断言对四边形成立. 进一步，若 N 是四边形的形心，O' 是圆 S' 的中心，$\bar{O}$是$\bar{S}$ 的中心，则 O，N，O' 在一直线上，并且 ON : $NO'=3$∶ 1；O,O' ，$\bar{O}$ 在一条直线上，并且 $O\bar{O}$: $OO'=3$: 2 . 所以 O，N，$\bar{O}$ 在一直线上，并且 ON : $N\bar{O}=2$: 2 ，这就证明了(c)的断言对四边形成立. 用完全一样的推理可以证明断言

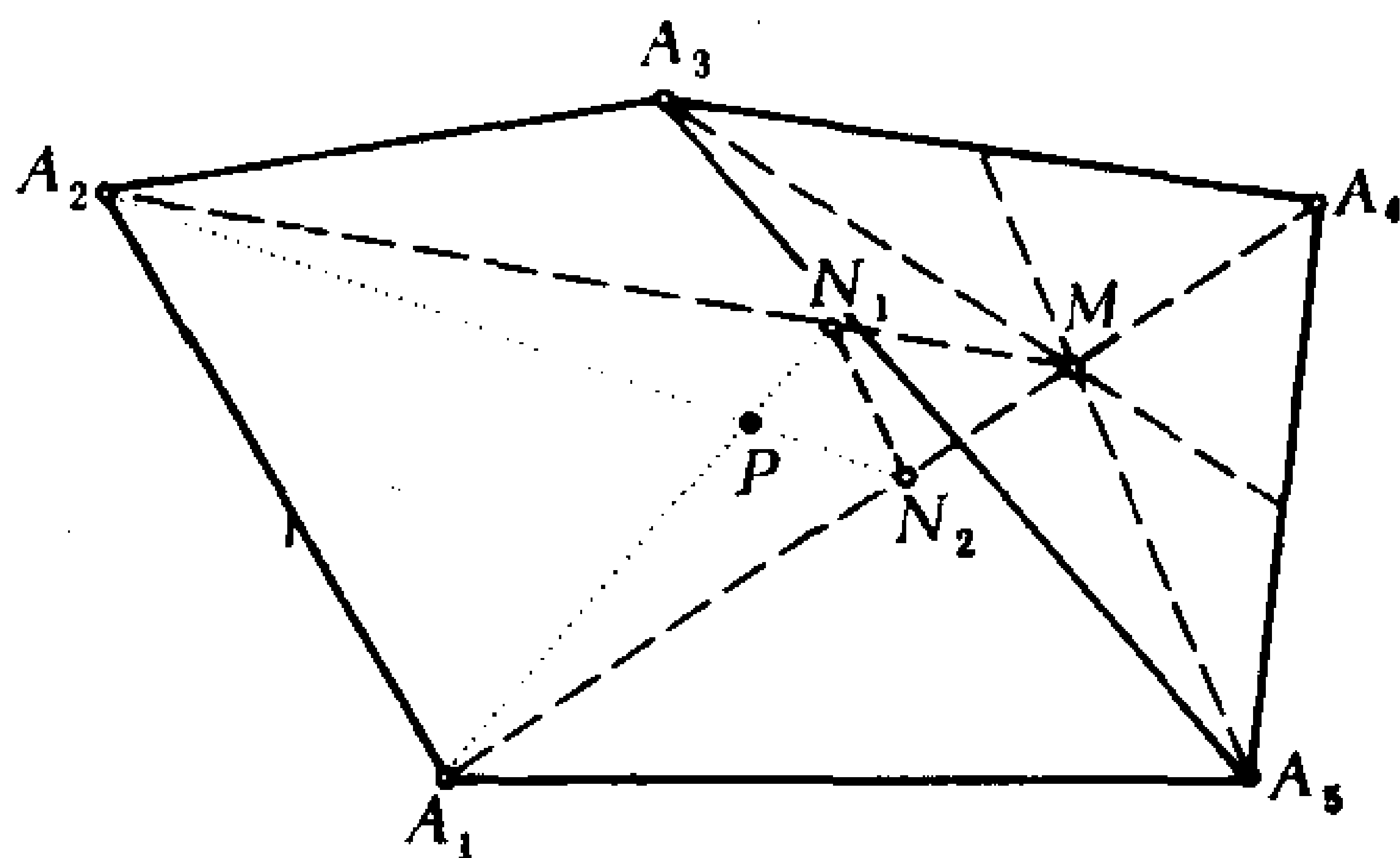


图 87(b)

(b)和(c)对任意多边形成立. 我们把证明留给读者去完成.

19. (a)作以点 M 为心，相似系数 k 充分小的中心相似，使得 l_1和l_2 在这中心相似下的像 l'_1和l'_2 在我们的画面范围之内相交〔图 88(a)〕. 连接 l'_1, l'_2 的交点和点 M 的直线即为所要求的直线.

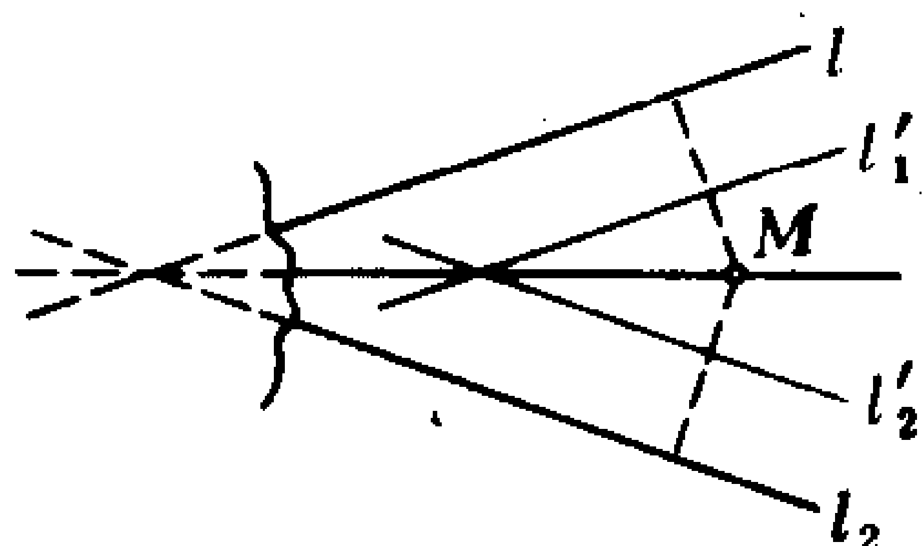


图 88(a)

在"不可到达"点不是由两条直线而是由一条直线和一个圆或两个圆给出（它们都相交在画面之外）的情况下，本题可以用同样的方法来解.

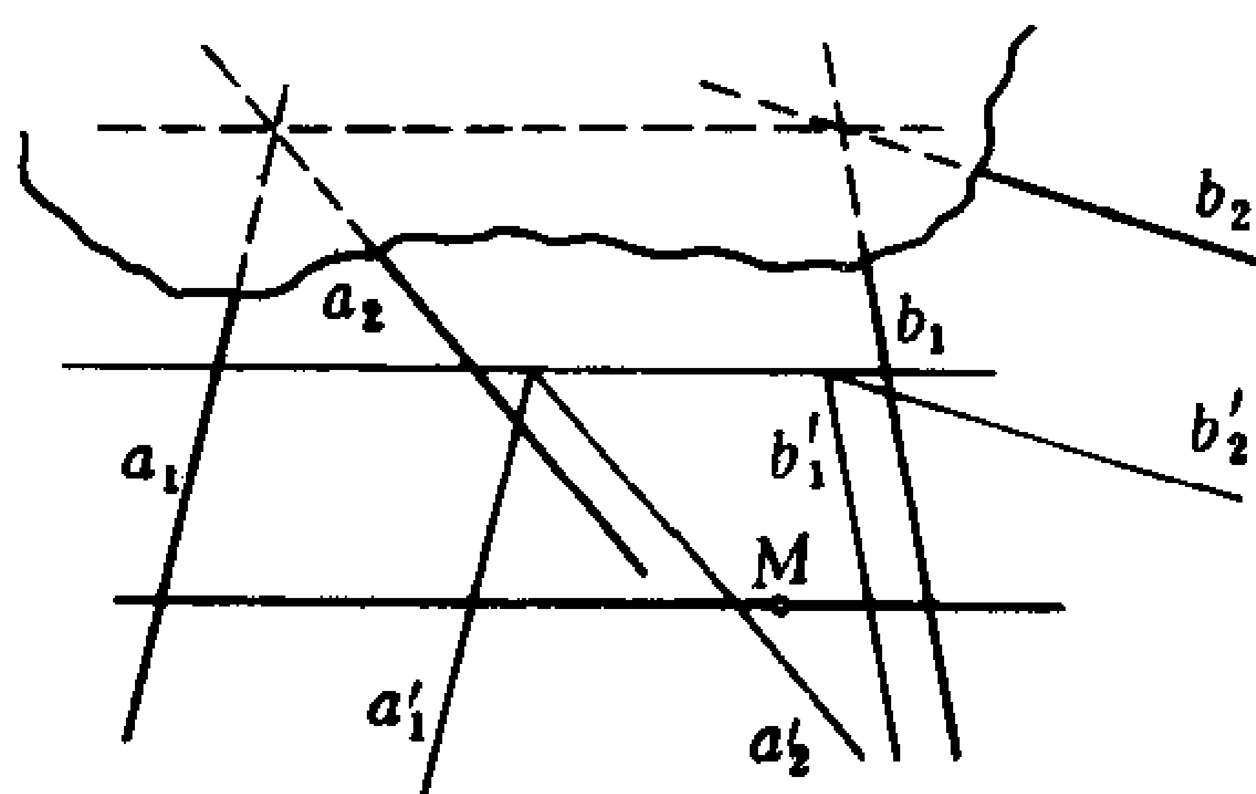


图 88(b)

(b) 作以点 M 为心，相似系数 k 充分小的中心相似，把直线 a_1, a_2 和 b_1, b_2 分别变成直线 a'_1, a'_2 和 b'_1, b'_2，使得 a'_1 和 a'_2 的交点及 b'_1 和 b'_2 的交点的连线在画面范围之内〔图 88 (b)〕. 过 M 且平行于这连线的直线即为所求的直线.

(c) 通过以任一可到达点 O 为中心，系数 k 充分小的中心相似，把点 A, B, C 变成在我们的画面范围之内的点 A'，B'，C'〔图 88(c)〕. 命 S' 是$\triangle A'B'C'$ 的外接圆. 所求的圆 S 以 O 为相似中心，以 $1/k$ 为相似系数中心相似于 S'. 这样，我们就能找出圆 S 的中心和半径.

20. 假设我们要在平面的有界部分 κ 上实现某种作图，并且假设当完整地作出图形 T 时，T 不完全包含在 κ 内. 作以

κ 中的某个点 O 为中心，相似系数 k 充分小的中心相似，使 T 所变成的图形 T' 整个落在 κ 内. 于是 T' 可以作出. 因为 T 以 O 为相似中心，以 $1/\kappa$ 为相似系数中心相似于已经作出的图形 T'，我们可以认为已经完成了 T 的作图（若 T 的某个点 A 中心相似于 T' 的点 A'，而 A 又不在平面的给定部分，则 A 可以由一对直线 l_1和l_2 确定，这对直线中心相似于过 A' 的某一对直线 l'_1 和 l'_2. 而且 l'_1和l'_2 总可以选得使 l_1和l_2 经过我们的画面范围. 例如，只要相似中心 O 到直线 l'_1 和 l'_2 的距离充分小）.

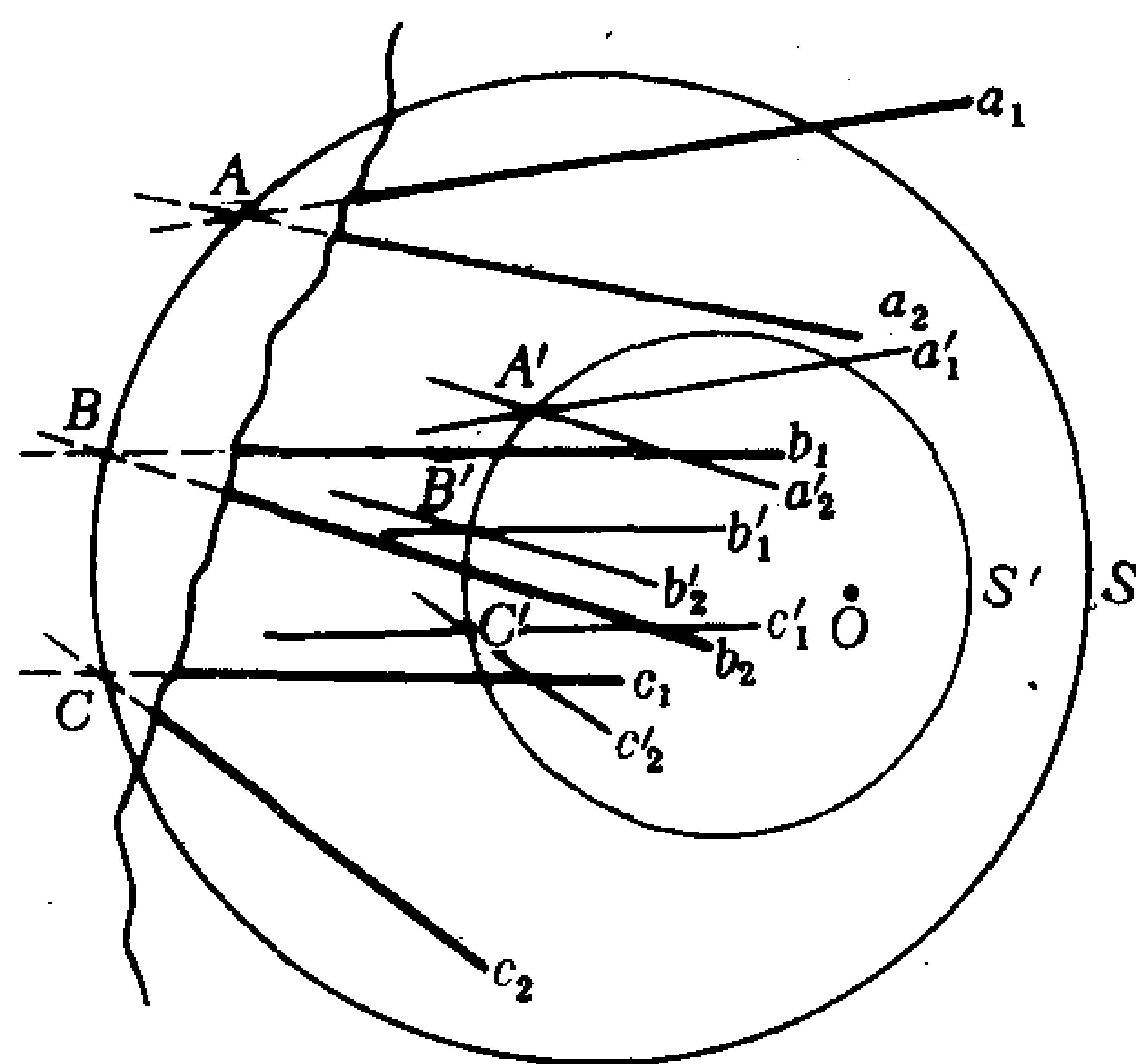


图 88(c)

21. 这个命题是三相似中心定理的一个特殊情形（见第 30 页）.

22. 设 S 是所要作的圆. 任作一个与 l_1和l_2 相切的圆 S_1（图 89；在图中我们不考虑 $l_1 // l_2$ 的情形，对这种情形，本题的解法非常简单）. 圆 S 和 S_1 的相似中心是 l_1和l_2 的交点 M. 圆 S_1和$\bar{S}$ 的相似中心可以作出. 圆 $\bar{S}$ 和 S 的相似中心是它们的切点 N. 由三相似中心定理（见第 30 页），点 M, O, N 在一直线上，即 N 是直线 OM 与圆 $\bar{S}$ 的交点. 找到了 N 以后我们就不难作出圆 S 了.

圆 $\bar{S}$和S_1 的相似中心 O 有两种选取方式，直线 OM 可以

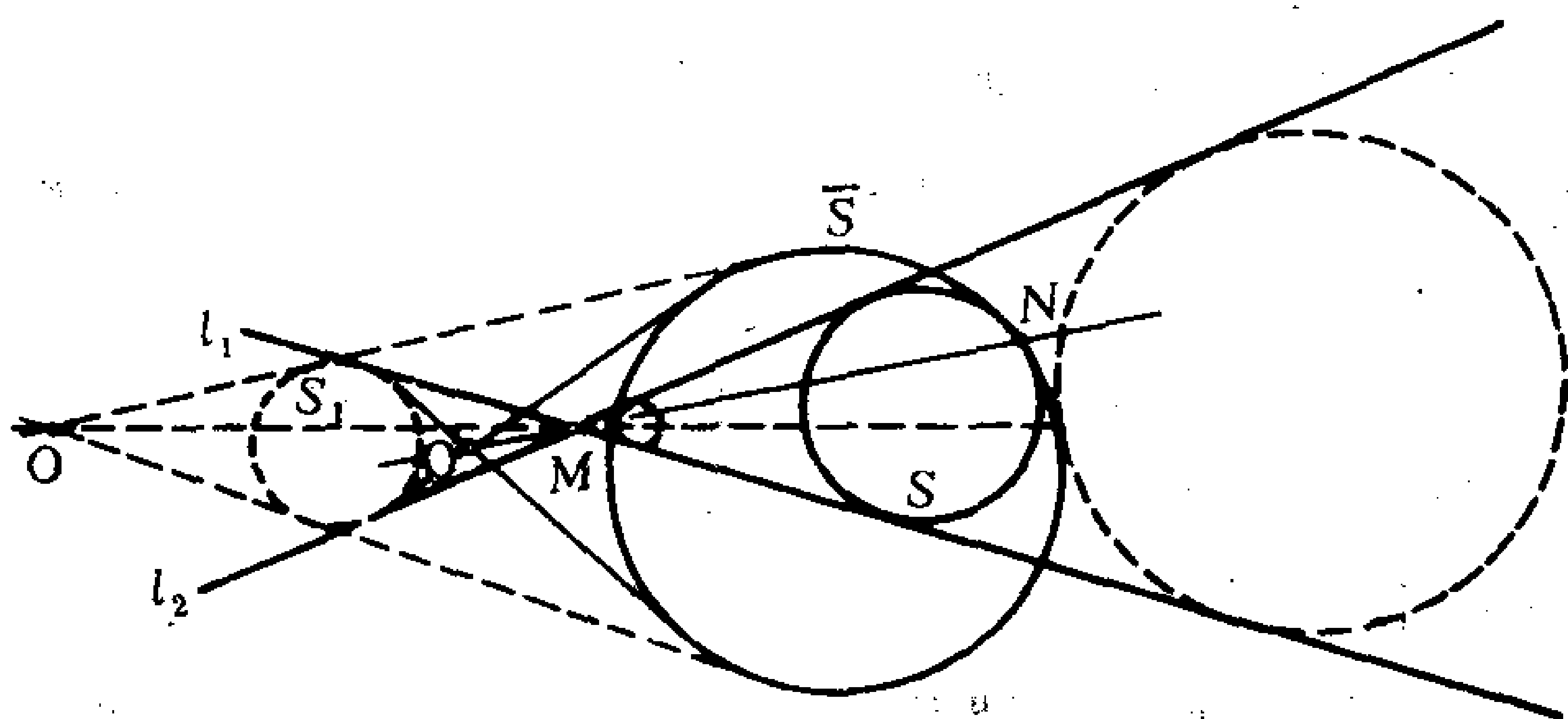


图 89

有两条，其中的每一条交 $\bar{S}$ 于两点. 所以可以作出四个圆，它们全都满足问题的条件. 这些圆的圆心都在由直线 l_1 和 l_2 构成的两个邻角的平分线上（图 89 中画出了 S_1 的中心落在一条角平分线的情形）. 如果选取 S_1 的中心在另一条角平分线上，我们还能找到四个解. 于是本题总共有 8 个解.

23. 考虑 n 个圆的一般情形. 设 S_1 和 S_2 在 M_1 相切（外切或内切），S_2 和 S_3 在 M_2 相切，…，S_{n-1} 与 S_n 在 M_{n-1} 相切，而 S_n 又与 S_1 在 M_n 相切. 命 A_1 是 S_1 的任意一点，A_2 是直线 A_1M_1 与 S_2 的第二个交点，A_3 是直线 A_2M_2 与 S_3 的第二个交点，…，A_n 是 $A_{n-1}M_{n-1}$ 与 S_n 的第二个交点，A_{n+1} 是 A_nM_n 与 S_1 的第二个交点〔参看图 21 (a)，21 (b)〕. 命 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}, r_n$ 分别表示圆 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}, S_n$ 的半径. 以 M_1 为中心，以 $k_1 = \mp r_2/r_1$ 为系数的中心相似（在这里，当 S_1 和 S_2 外切时取“－”号，内切时取“＋”号）把 S_1 变到 S_2，并且把 A_1 变到 A_2；以 M_2 为中心，以 $k_2 = \mp r_3/r_2$ 为系数（外切时取“－”号，内切时取“＋”号）的中心相似把 S_2 变到 S_3，并把 A_2 变到 A_3；…；以 M_{n-1} 为中心，以 $k_{n-1} = \mp r_n/r_{n-1}$ 为系数的中心相似把 S_{n-1} 变到 S_n，并把 A_{n-1} 变到

A_n；最后，以 M_n 为中心，以 $k_n=\mp r_1/r_n$ 为系数的中心相似把 S_n 变到 S_1，并把 A_n 变到 A_{n+1}. 因为

$$k_1k_2\cdots k_{n-1}k_n=(\mp r_2/r_1)(\mp r_3/r_2)\cdots(\mp r_n/r_{n-1})(\mp r_1/r_n)$$
$$=\pm 1,$$

故所有这些中心相似之和或者是一个平移（可能平移的距离为 0，即恒等变换），或者是一个系数为 -1 的中心相似，即中心对称变换（见第一册第一章 §2 第15页）. 但是我们知道这 n 个中心相似变换之和把圆 S_1 变到它本身，所以这些变换之和必定是恒等变换或者是关于 S_1 的圆心的一个中心对称变换. 当 $k_1k_2\cdots k_n=1$，即外切圆数目是偶数时出现前一种情形，特殊情形是所有的圆都外切，而且一共有偶数个圆. 当外切圆个数是奇数时出现第二种情形，特殊情形是所有圆都外切，并且一共有奇数个圆. 这就证明了（a），（b）中的结论.

显然，若按同样的顺序把所有变换重复一次，我们得到的是恒等变换. 所以若 A_{2n+1} 是按从 A_1 得到 A_{n+1} 的同样方式由 A_{n+1} 得到的 S_1 的点，则 A_{2n+1} 总与 A_1 重合. 这就可证更多的结论.

24. 首先考虑三个圆 R，S 和 T，其中 R 和 S 在点 M 处外切，S 和 T 在点 P 处外切，而 T 和 R 在点 N 处外切（图90）. 我们还假设 T 的半径比 R 与 S 的半径大得多. 若 T 的半径无限增大，则图 90 将越来越接近图 22. 在极限情形图90变成图 22，从而问题 23(a) 的结果就成为本题所要的结果.

25. 显然，对应边平行的三个三角形 ALK，MBN，QPC 可以彼此经过中心相似变换得到. $\triangle ALK$ 和 $\triangle MBN$ 的相似中心是 AB 与 KN 的交点，$\triangle MBN$ 与 $\triangle QPC$ 的相似中心是 BC 和 MQ 的交点，而 $\triangle QPC$ 与 $\triangle ALK$ 的相似中心是 CA 与 PL 的交

点（图 91）. 综上所述并用三相似中心定理（见第 30 页）即可得到本题所要的结论.

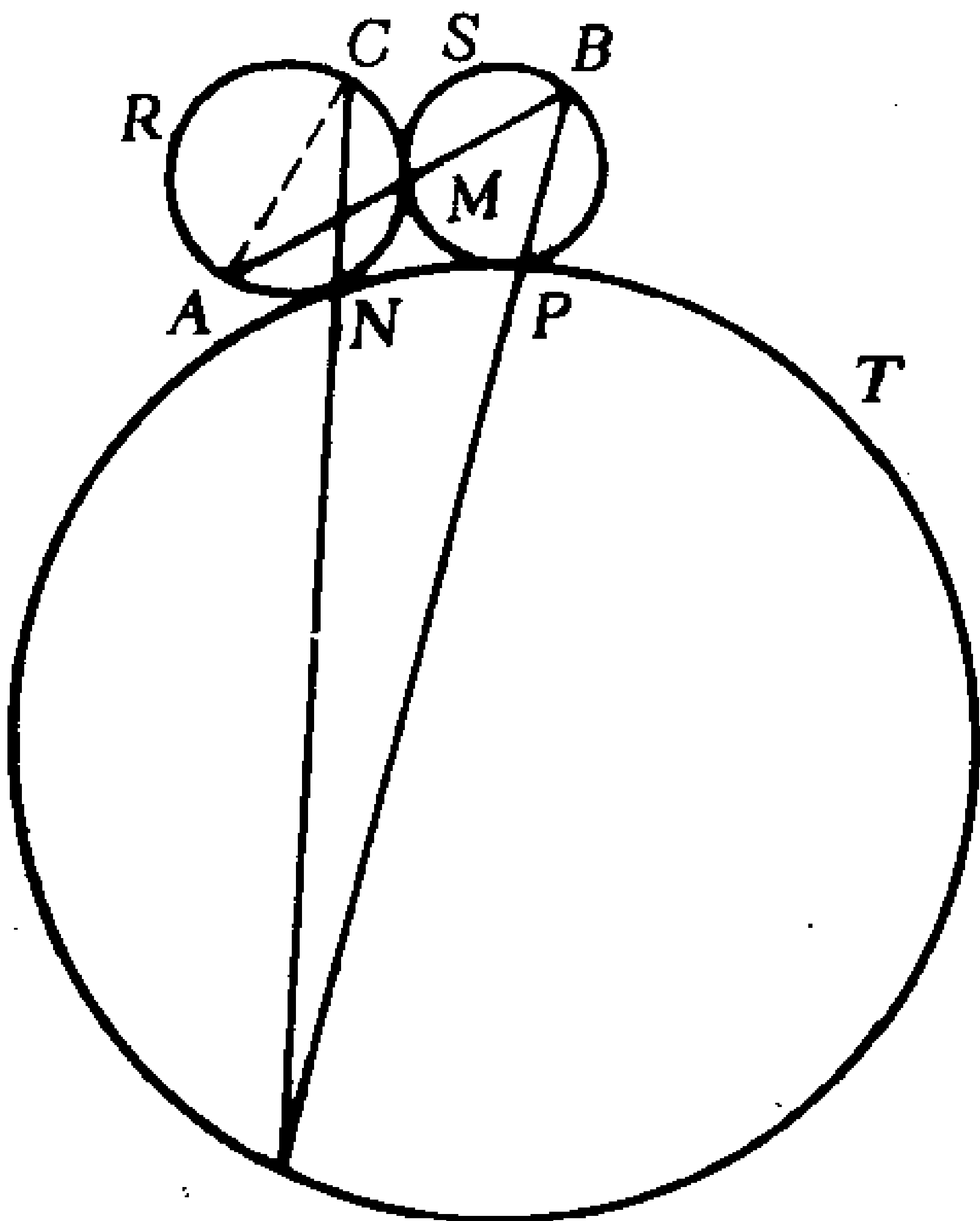


图 90

三相似中心定理的确切阐述使我们可以改进对问题 25 中结果的叙述：或者 AB 与 KN，BC 与 MQ，CA 与 PL 的交点全都在一直线上；或者恰好这些交点之一不存在，这时相应的一对平行线平行于剩下的两个交点的连线，例如，$AB \parallel KN \parallel UV$，这里 U 是 BC 与 MQ 的交点，而 V 是 CA 与 PL 的交点；或者不存在任何交点，即 $AB \parallel KN$，$BC \parallel MQ$，$CA \parallel PL$.

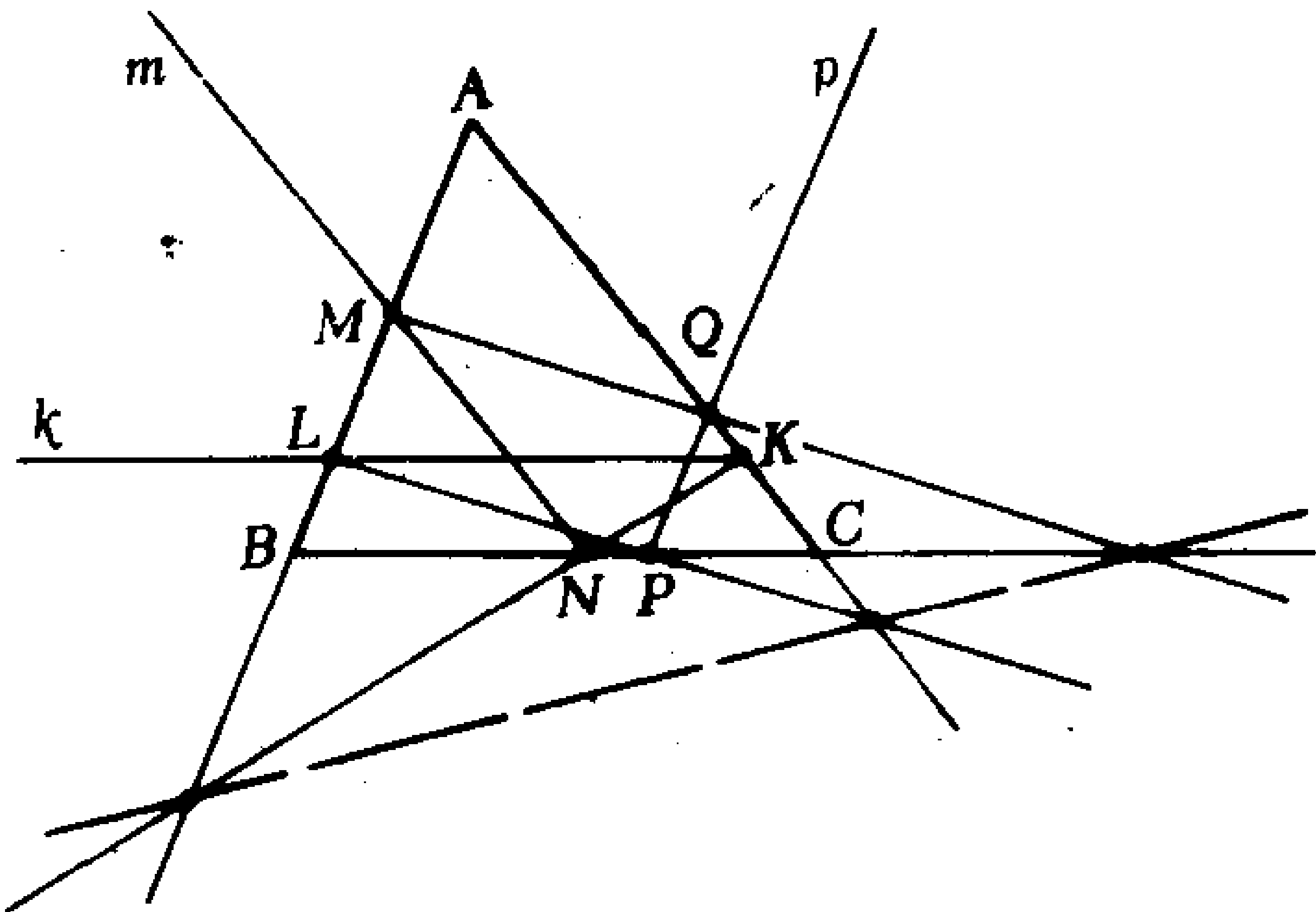


图 91

26. (a) $\triangle EFD$ 是由给定的三角形 ABC 经过以三角形 ABC 的重心为中心，以 $k_1=-1/2$ 为系数的中心相似得到的〔参看问题 14 (a) — (c)〕；$\triangle LMK$ 是由三角形 EFD 经过一个

中心在 P，系数为 $k_2=2$ 的中心相似得到的（图 92）. 因为 $k_1k_2=(-1/2)\cdot 2=-1$，所以 $\triangle LMK$ 是由 $\triangle ABC$ 经过系数 $k=-1$ 的中心相似，即关于某点 Q 的中心对称得到的. 证完.

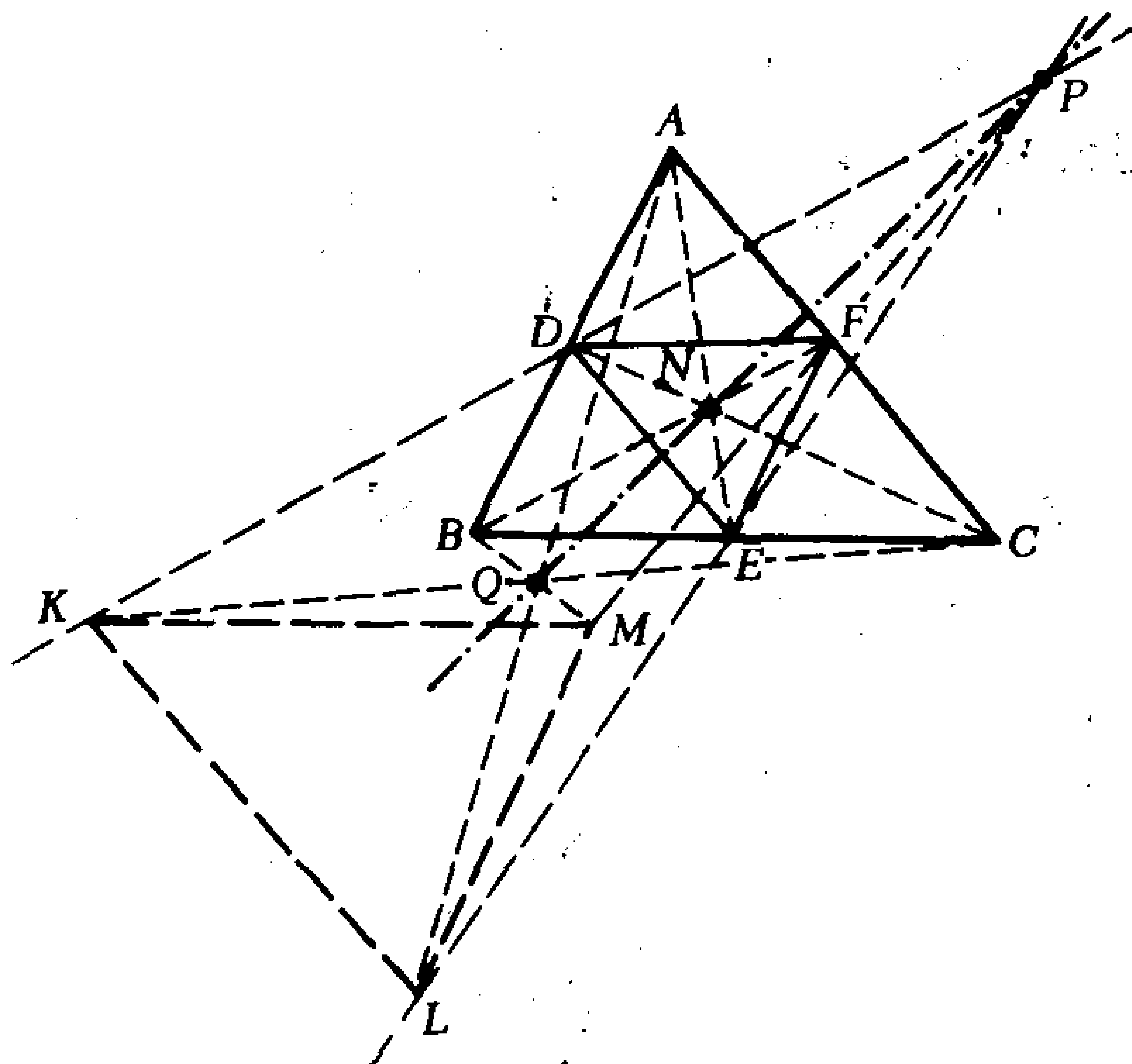


图 92

(b) 由第 30 页上导出的公式，我们有

$$O_1O=\frac{k_2-1}{k_1k_2-1}O_1O_2 .$$

若命

$$O_1=N, \quad O_2=P, \quad O=Q,$$

并且

$$k_1=-\frac{1}{2}, \qquad k_2=2,$$

则我们得到

$$NQ=\frac{2-1}{-1-1}NP=-\frac{1}{2}NP,$$

即 Q 是由 P 经过中心在 N，系数为 $-1/2$ 的中心相似得到的．所以当 P 描出一个圆 S 时，Q 也描出一个圆，这个圆由 S 经过所叙述的中心相似得到．

27．(a) 命 F_A 是包含三角形顶点 A 的某个图形；F_C是由F_A经过中心在 P，系数为 $k_1=PC/PA$ 的中心相似得到的图形；F_B是由F_C经过中心在 N，系数为 $k_2=NB/NC$ 的中心相似得到的图形〔图 93 (a)〕．显然，图形 F_A的点 A 对应于图形 F_C的点 C，而点 C 又对应于图形 F_B的点 B．由中心相似的加法定理，F_B是由F_A经过中心在 O，系数为 k 的中心相似得到的；这里 O 在直线 BA(因为 B 与 A 是图形 F_B与F_A 中的对应点）和直线 PN 上（由三相似中心定理），而

$$k=k_1k_2=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}.$$

若 $k_1k_2=1$，则F_B是由 F_A经平移得到的．若

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1,$$

则

$$\frac{MB}{MA}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}=k_1k_2=k.$$

由 $OB/OA=k$ 可知 M 与 O 重合，因而 M 在直线 PN 上．反过来，若点 M,N,P 共线，则 M 是直线 AB 与 PN 的交点，因而 M 与 O 重合．所以有

$$\frac{MB}{MA}=\frac{OB}{OA}=k=k_1k_2=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}.$$

因此，

$$\frac{AM}{BM}=\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1.$$

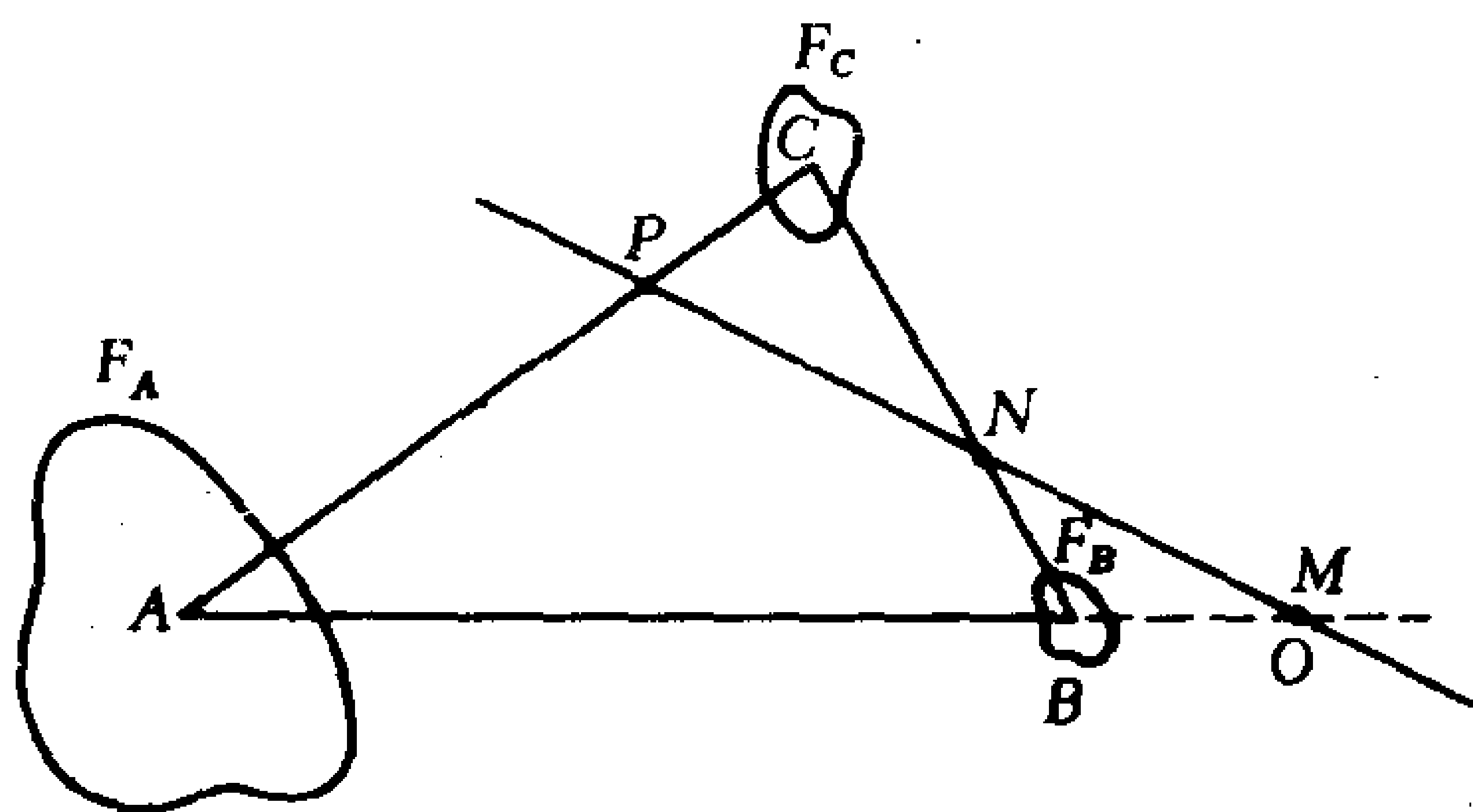


图 93(a)

注 1 注意在问题 27(a)的解答中，只须证明问题中条件的必要性或充分性即可．另一半可以由已经证明的结果推得．事实上，例如，假设我们已经证明了：若$(AM/BM)\cdot(BN/CN)\cdot(CP/AP)=1$，则点 M,N,P 在一直线上．为了得到它的逆，我们假设 M,N,P 共线，然后必须证明$(AM/BM)\cdot(BN/CN)\cdot(CP/AP)=1$．为此命 $\overline{M}$ 是直线 AB 上的一点，使得$(A\overline{M}/B\overline{M})(BN/CN)(CP/AP)=1$，根据我们刚才假设已证明的定理，点 $\overline{M}$，N，P 共线．由此可知 $\overline{M}$ 与 M 重合，所以$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=1$．用类似的方式，我们可以从条件的必要性导出条件的充分性．我们把这个推导留给读者．

注 2 梅涅劳定理可以与第一册第一章§2 问题 15 的下述推广相联系：给定 n 个点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$，作一个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，使得这 n 个点分它的 n 条边成已知比（正的或负的）$A_1M_1/A_2M_1=k_1, A_2M_2/A_3M_2=k_2,\cdots,A_nM_n/A_1M_n=k_n$（这里不需要假设 n 边形的边数为奇数）．正如问题 15 的第二种解法一样，可以证明若 $k_1k_2\cdots k_n\neq1$，则本题有唯一解；若 $k_1k_2\cdots k_n=1$，则一般说来本题无解，而对于点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 的某些特殊位置，本题的解不定．由此可知若 $k_1k_2\cdots k_n\neq1$，则

平面上的点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的分布是任意的；另一方面，若

$$k_1k_2\cdots k_n = \frac{A_1M_1}{A_2M_1}\ \frac{A_2M_2}{A_3M_2}\ \cdots\ \frac{A_nM_n}{A_1M_n} = 1,$$

则这个分布必须满足某些特别的条件. 在 $n=3$ 的情形下，由三相似中心定理，这些特殊的条件变为要求点 M_1, M_2, M_3 在一直线上. 于是得出梅涅劳定理.

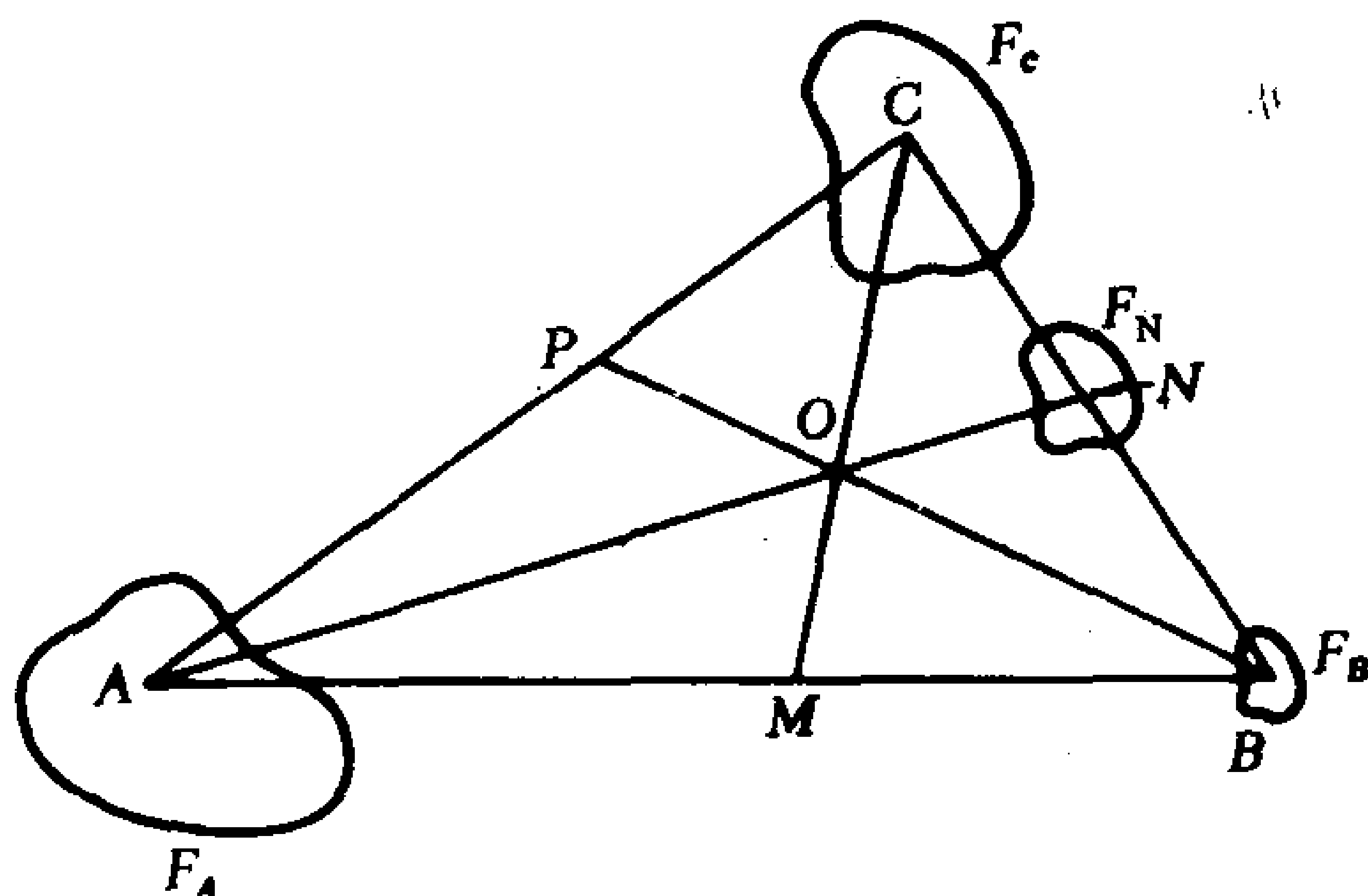


图 93(b)

(b) 设直线 CM, AN, BP 交于一公共点 O〔图 93(b)〕. 考虑任一包含点 A 的图形 F_A. 设以 O 为相似中心，系数为 $k=ON/OA$ 的中心相似把 F_A 变成图形 F_N（图形 F_A 中的点 A 对应于图形 F_N 中的点 N）. 以 B 为中心，系数为 $k_1=BC/BN$ 的中心相似把 F_N 变成图形 F_C（图形 F_N 中的点 N 对应于图形 F_C 中的点 C）. 以 C 为中心，$k_2=CB/CN$ 为系数的中心相似把 F_N 变到图形 F_B（图形 F_N 中的 N 对应于图形 F_B 的点 B）. 由中心相似的加法定理，图形 F_C 中心相似于 F_A，它们的相似中心同时在直线 CA(C 与 A 是图形 F_A 与 F_C 中的对应点）和直线 BO（由三相似中心定理）上，即相似中心与 P 重合，它们的相似

系数等于 $kk_1=(ON/OA)(BC/BN)$．类似地，可以证明 F_B 以 M 为中心，以 $kk_2=(ON/OA)(CB/BN)$ 为相似系数中心相似于 F_A. 于是我们有

$$\frac{PC}{PA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{BC}{BN},\quad \frac{MB}{MA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{CB}{CN}.$$

用第二式除以第一式即得

$$\frac{PC}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=-\frac{CN}{BN}\quad 或\quad \frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1.$$

这就是我们所要证明的.

现在设 $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA)=-1$，例如，若直线 AN 与 BP 交于点 O. 命 $\overline{M}$ 是 CO 与 AB 的交点. 于是，由上面所证，有

$$\frac{\overline{M}A}{\overline{M}B}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1,$$

即 $\overline{M}$ 与 M 重合. 这样，我们看出若

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1,$$

则 AN,BP,CM 或者共点或者平行.

最后，设 $AN,BP,C\overline{M}$ 都平行，命 $\overline{M}$ 是直线 AB 上的点，使得 $(\overline{M}A/\overline{M}B)(NB/NC)(PC/PA)=-1$. 在这种情形下 $C\overline{M}$ 不能与 AN 或 BP 相交（否则三条直线 $AN,BP,C\overline{M}$ 必定共点）. 所以 $\overline{M}$ 与 M 重合，从而

$$(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA)=-1.$$

注 不难看出塞瓦定理的这些证明相当于梅涅劳定理的两次应用，第一次是对 $\triangle ANC$（各边上的点是 P,O,B），然后再对 $\triangle ANB$（各边上的点是 M,O,C）.

28. (a) 由问题 18 (a) 的结果，四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $M_1M_2M_3M_4$ 是以四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的形心 N 为相似中心，以

$-1/3$ 为相似系数中心相似的．这里 M_1, M_2, M_3, M_4 分别是 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的重心．又由问题 14(a)的结果，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与 $M_1M_2M_3M_4$ 是以圆 S 的中心 O 为相似中心，以 $3/1$ 为相似系数中心相似的．其中 H_1, H_2, H_3, H_4 分别是上面那些三角形的垂心．这样，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 可以由四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 经过连续施行系数分别为 $k_1=-1/3$ 和 $k_2=3$ 的两次中心相似变换得到．但是这样两个中心相似之和是一个系数为 $k_1k_2=-1$ 的中心相似，即关于某一点的中心对称，从而得到第一册问题 33(a)的断言．

注 由三相似中心定理，第一册问题 34(a)中的点 H，形心 N，外接圆心 O 在一直线上．不难证明 N 是 OH 的中点（例如见第 30 页）．

(b) 这部分的解法与(a)的解法类似．但必须用到下面的事实：三角形的九点圆的中心 $\bar{O}$，外接圆中心 O 和垂心 H 在同一直线上，并且 $O\bar{O}/OH=1/2$（见问题 17(a)的解）．

29. (a) 考虑四个点 A_1, A_2, A_3, H_4．由这些点可以作四个三角形 $A_1A_2A_3$，$A_1A_2H_4$，$A_1A_3H_4$，$A_2A_3H_4$．我们证明这些三角形的欧拉圆全都重合．事实上，$\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle A_2A_3H_4$ 的欧拉圆的半径等于这两个三角形外接圆半径的一半．因为 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle A_2A_3H_4$ 的外接圆关于直线 A_2A_3 对称〔见第一册问题 33(b)的解〕，所以这两个欧拉圆的半径相等．再者，第一个欧拉圆的中心在线段 H_4O 的中点，这里 O 是 S 的中心，第二个欧拉圆的中心在线段 A_1O_1 的中点，其中 O_1 是 $\triangle A_2A_3H_4$ 外接圆的中心（因为 A_1 是 $\triangle A_2A_3H_4$ 的垂心）．由于这两条线段的中点重合〔四边形 $A_1H_4O_1O$ 是平行四边形，见第一册问题 33(c)的解〕，可见这两个欧拉圆的中心重合．从而这两个欧拉圆

本身也重合. 同理可证 $\triangle A_1A_2H_4$, $\triangle A_1A_3H_4$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的欧拉圆重合.

用类似的方法可以证明，所考虑的 32 个欧拉圆中的每一个与三角形 $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, $H_1H_2H_3$, $H_1H_2H_4$, $H_1H_3H_4$, $H_2H_3H_4$ 中之一的欧拉圆重合.

(b) 所有这些欧拉圆全等可由这一册问题 18(b) 和第一册问题 34(a) 的结果推得. 由问题 18(b)，这些圆中的四个交于一公共点 $\bar{O}$，另外四个交于点 $\bar{O}'$. 又由点 $\bar{O}$ 与 $\bar{O}'$ 关于线段 A_1H_1 的中点 H 是对称的〔见第一册问题 34(a)〕，$\bar{O}$ 落在 ON 的延长线上，且使得 $ON = N\bar{O}$〔N 是分线段 A_1M_1 成比 $A_1N : NM_1 = 3 : 1$ 的点，这里 M_1 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心，见问题 18(c)〕. 由上面所述和 $OM_1 : M_1H_1 = 1 : 2$〔见问题 14(a)〕可知，$\bar{O}$ 与 H 重合(见图 94)，所以 $\bar{O}'$ 与 $\bar{O}$ 重合.

(c) 容易由第一册问题 34(a) 和这一册问题 28(b) 的结果得出.

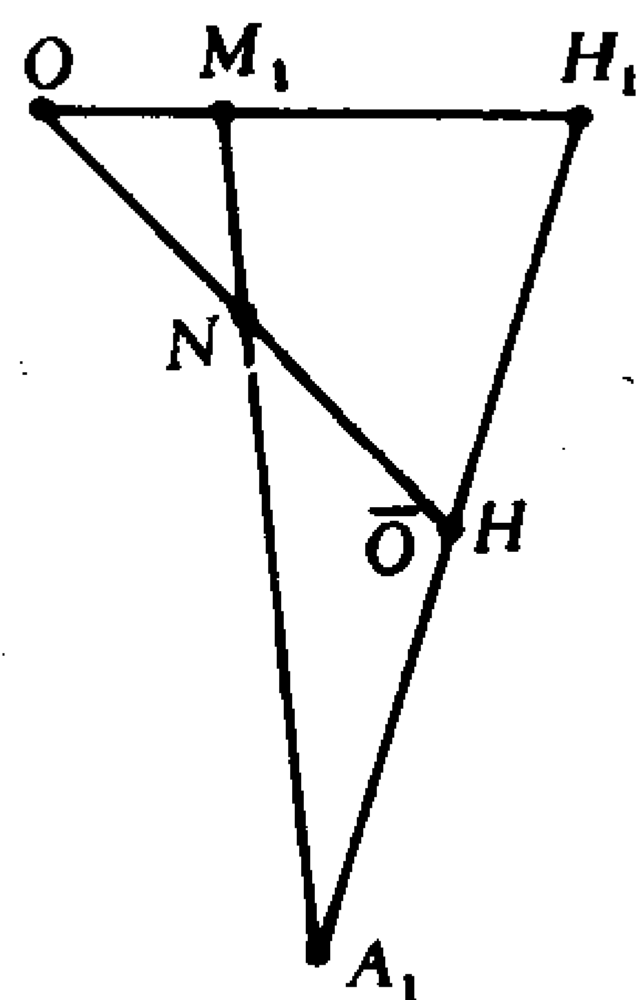


图 94

30. (a) 假设 $\triangle PXY$ 已经作好〔图 95 (a)〕. 点 Y 是由 X 经过以 P 为旋转中心，转角 α 等于 $\triangle LMN$ 的角 L，相似系数 k 等于这三角形边的比 LN/LM 的螺旋相似得到的. 由此即知 Y 在由 BC 经过中心在 P，转角为 α，系数为 k 的螺旋相似所得到的直线 l 上，又因为 Y 在 AC 上，所以 Y 是 l 与 AC 的交点. 若 $l /\!/ CA$，则本题无解；若 l 与 AC 重合，则解不定.

(b) 注意，若平行四边形 $K'L'M'N'$ 内接于平行四边形 $ABCD$〔图 95 (b)〕，则这两个平行四边形的对角线的交点

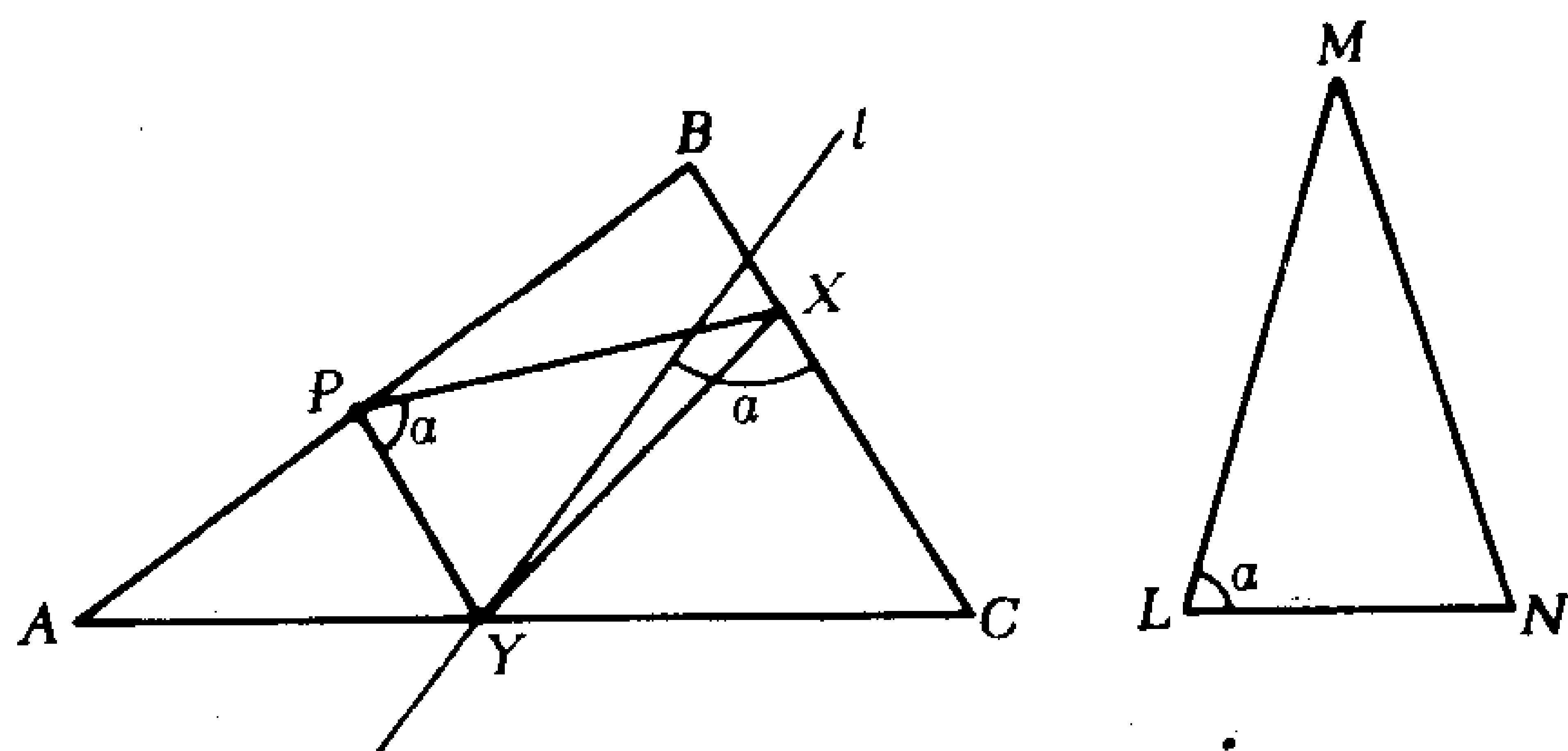


图 95(a)

（即中心）O' 和 O 重合：因为对角线 $K'M'$ 和 $L'N'$ 的公共中点 O' 在平行四边形 $ABCD$ 的两条中线上①，所以它与中心 O 重合.

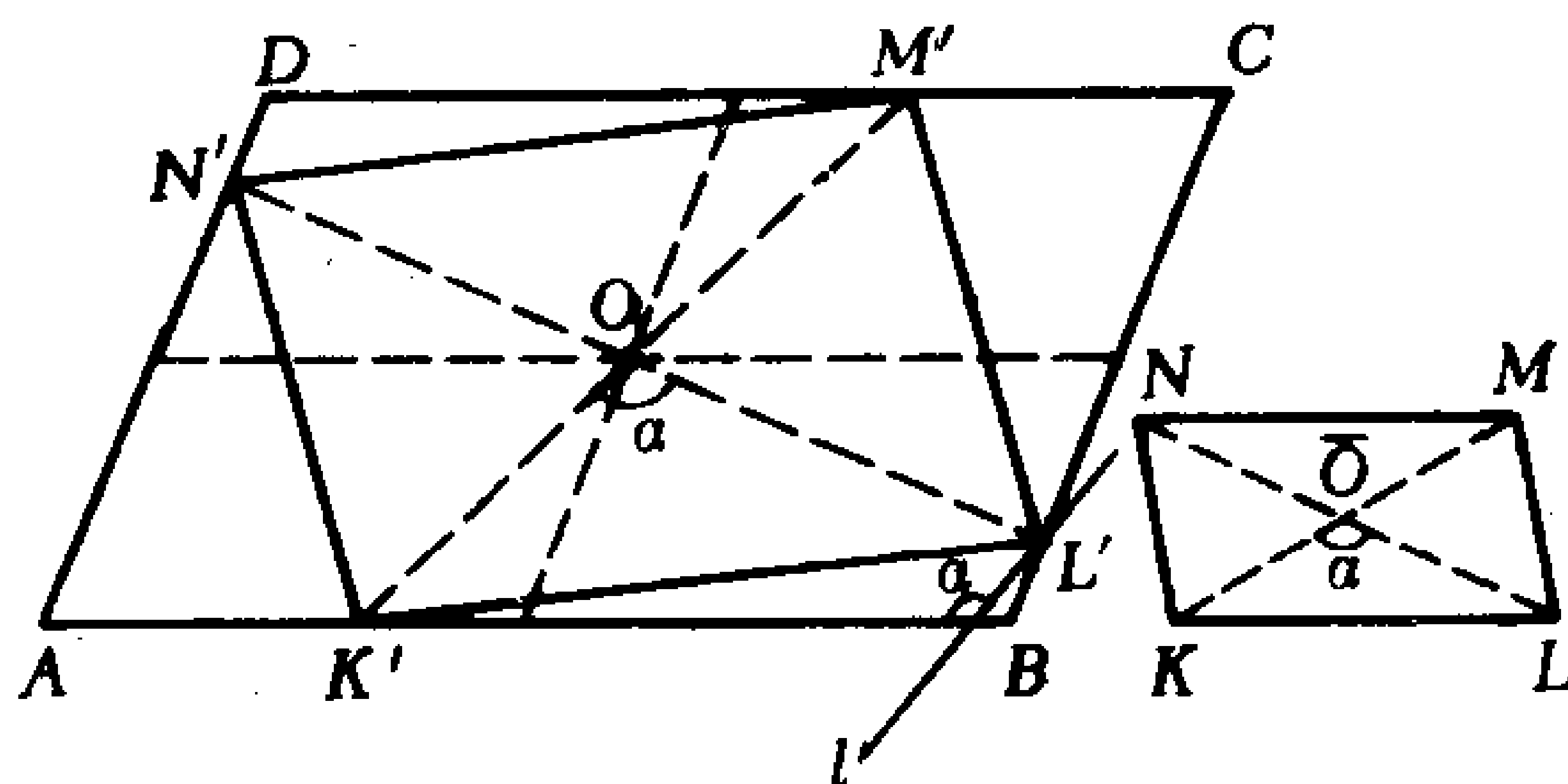


图 95(b)

现在设 $K'L'M'N'$ 是所求的平行四边形. 这时 $\triangle K'O'L'$ 相似于 $\triangle K\bar{O}L$，这里 $\bar{O}$ 是 $KLMN$ 的中心. 以 O 为中心，转角为 $K\bar{O}L$，相似系数为 $\bar{O}L/\bar{O}K$ 的螺旋相似把平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 变到直线 l，直线 l 与直线 BC 的交点确定了所求平行四边形的顶点 L'〔参看(a)的解〕.

31. 设 B 是 S_1 和 S_2 的第二个交点，联 BM_1，BM_2，

① 平行四边形的中线是指连接两条对边中点的直线.

BO_1，BO_2，O_1O_2（图96）。$\triangle BM_1M_2$ 相似于 $\triangle BO_1O_2$（因 $\angle BO_1O_2=\angle BO_1A/2=\angle BM_1A$ 和 $\angle BO_2O_1=\angle BO_2A/2=\angle BM_2A$），因此 $\triangle BM_1M_2$ 是由 $\triangle BO_1O_2$ 经过以 B 为中心，转角 α 等于 $\angle M_1BO_1$，相似系数 $k=BM_1/BO_1$ 的螺旋相似得到的．作 $\triangle BO_1O_2$ 的外接圆 S 和 $\triangle BM_1M_2$ 的外接圆 S'．由于

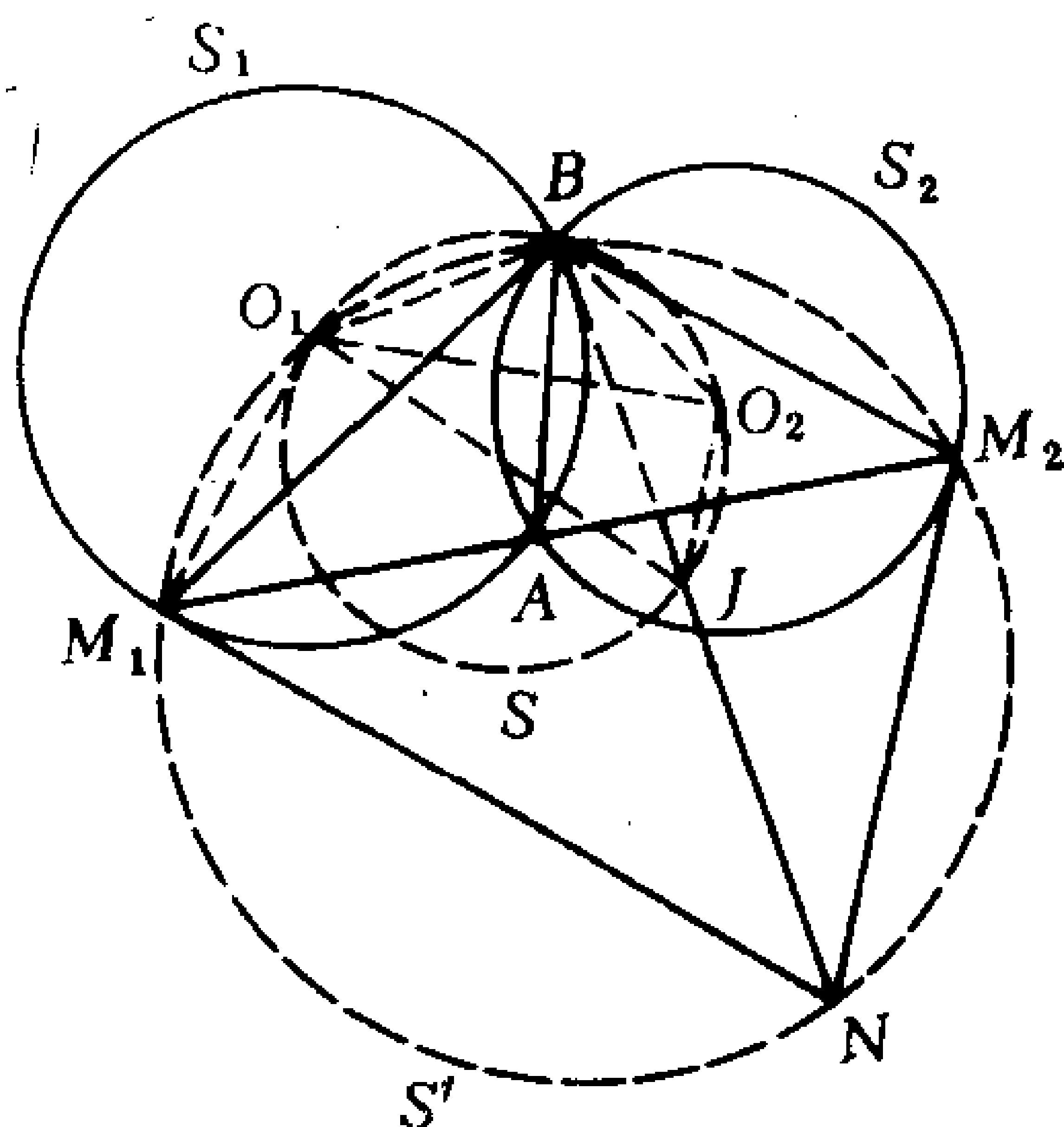


图 96

$$\begin{aligned}
&\angle BM_1N+\angle BM_2N\\
&=(\angle BM_1M_2+\angle BM_2M_1)+(\angle NM_1M_2+\angle NM_2M_1)\\
&=(\angle BM_1M_2+\angle BM_2M_1)+(\angle M_1BA+\angle M_2BA)\\
&=\angle BM_1M_2+\angle BM_2M_1+\angle M_1BM_2=180^\circ,
\end{aligned}$$

我们知道 S' 过点 N．因为

$$\angle O_1BO_2+\angle O_1JO_2=\angle M_1BM_2+\angle M_1NM_2=180^\circ,$$

我们知道 S 过点 J，进而有

$$\angle NBM_1=\angle NM_2M_1,\qquad \angle JBO_1=\angle JO_2O_1.$$

于是 $\angle NBM_1$ 与 $\angle JBO_1$ 之差等于 $\angle NM_2M_1$ 与 $\angle JO_2O_1$ 之差．由于 $M_2N\,/\!/\,O_2J$ 并且它们同向，所以这个差就是在上述螺旋相似下的两对应线段 M_2M_1 和 O_2O_1 之间的夹角．故 $\angle NBM_1$ 和 $\angle JBO_1$ 之差等于 M_2M_1 与 O_2O_1 的夹角，亦即转角 α．由

$$\angle JBO_1-\angle NBM_1=\alpha=\angle M_1BO_1$$

即知直线 NJ 过 B，这证明了本题的第一个断言．

为了证明第二个断言，只要注意到 $JO_1 /\!/ NM_1 \perp O_1M_1$，并且 $\angle JNM_1 = \angle M_1M_2B = \angle O_1O_2B$．于是我们知道线段 JN 与直线 O_1M_1的交角 $= 90° - \angle O_1O_2B$，并且 JN 到这直线的垂直投影是有定长 r_1(r_1是S_1 的半径)的线段 O_1M_1．所以

$$JN = r_1/\cos(90° - \angle O_1O_2B) = r_1/\sin\angle O_1O_2B,$$

显然，它不依赖于直线 M_1AM_2 的选取.

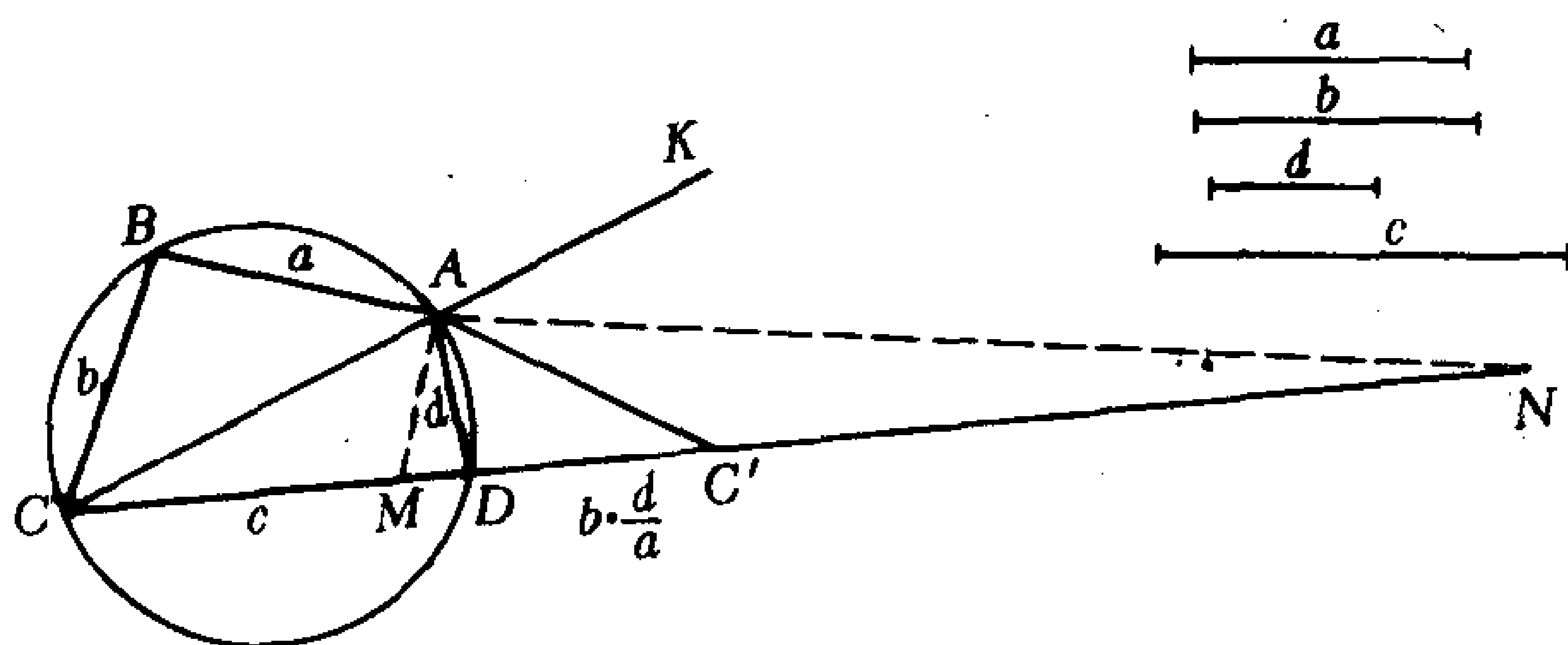


图 97(a)

32. (a) 假设四边形 $ABCD$ 已作好〔图 97 (a)〕. 以 A 为中心，相似系数为 d/a，转角为$\angle BAD$ 的螺旋相似把$\triangle ABC$ 变成$\triangle ADC'$，这里 C' 落在 CD 的延长线上 (因为$\angle ADC + \angle ABC = 180°$). 在$\triangle ACC'$ 中，已知线段 $CD = c$, $DC' = bd/a$, $DA = d$ 以及边的比 $AC'/AC = d/a$，所以这三角形能够作出〔作线段 CC'，$\triangle ACC'$ 在顶点 A 的内角及外角的平分线交直线 CC' 于点 M 和 N，使得 $C'M/CM = C'N/CN = d/a$，这些点能作出来. 因为$\angle MAN = 90°$，由此可知 A 是以线段 MN 为直径的圆与以 D 为中心，以 d 为半径的圆的交点〕. 再在线段 AC 上作$\triangle ABC$，使得边 $AB = a$ 和 $BC = b$，就得到所要的四边形.

本题或恰有一解或根本无解.

(b) 的解法类似于 (a). 假设四边形 $ABCD$ 已作好〔图 97 (b)〕. 以 A 为中心，相似系数为 d/a，转角为$\angle BAD$ 的螺旋相

似把$\triangle ABC$变成$\triangle ADC'$，这里C'由$\angle CDC' = \angle B + \angle D$和$DC' = b \cdot d/a$确定. 作三角形$CDC'$，点$A$可以作为以线段$MN$为直径的圆（这里$M$和$N$是直线$CC'$上的两个点，使$C'M/CM = C'N/CN = d/a$）和以$D$为中心，以$d$为半径的圆的交点定出来.

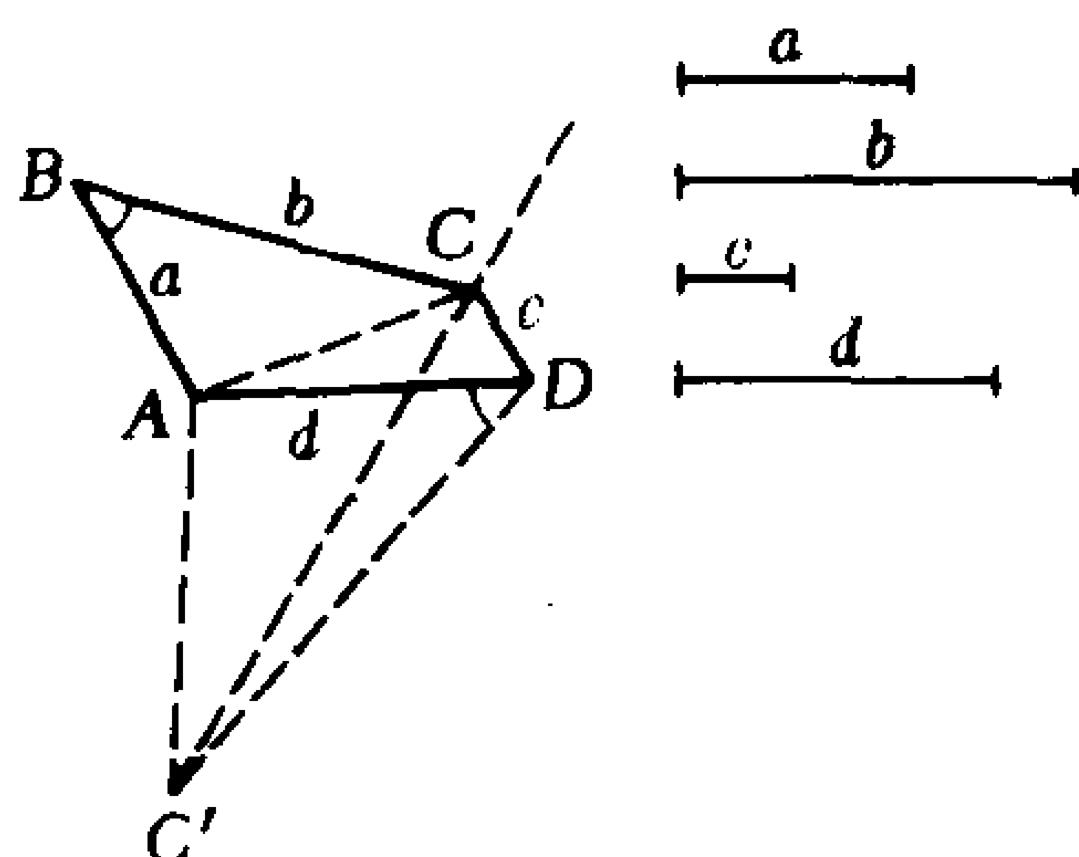


图 97(b)

33. 用N表示圆R与S的第二个交点，联结NA和NB（图 98）. 注意$\angle BAN$和$\angle ABN$不依赖于直线l的选取：事实上，$\angle BAN = \angle MAN$，它由定弦MN决定；$\angle ABN = \angle MBN$的情况类似. 因此，$\triangle ABN$的第三个角$\angle ANB = \varphi$不依赖于l的选取（这个论证是不完全的. 在我们的图形中，仅考虑了M在A与B之间的情形. 对于A在B与M之间和B在A与M之间这两种情形的论证，我们留给读者去完成）. 注意角φ可以通过两个圆R与S之间的交角α找出来（关于两个圆交角的定义见问题 34 的叙述）. 事实上，因为这个角不依赖于直线l的选取，我们取$l \perp MN$，于是NA和NB与直径NO_1A和NO_2B重合，这里O_1和O_2分别是R和S的中心，因而或者$\varphi = \angle O_1NO_2 = \alpha$或者$\varphi = 180° - \alpha$.

进而，因为$\triangle ANB$的各角不依赖于l的选取，比$NB/NA = k$同样也不依赖于l的选取. 于是B是由A经过以N为心，转角为φ，相似系数为k的螺旋相似得到的（容易看出，相似系数$k = NB/NA$等于R与S的半径之比r_2/r_1：这可以由选取

$l \perp MN$ 得出，因为这时有 $NB = 2r_2$，而 $NA = 2r_1$；它也可以由系数为 k 的螺旋相似把半径为 r_1 的圆 R 变成半径为 r_2 的圆 S 这一事实推得).

显然，若点 Q 把线段 AB 分成定比 $AQ/QB = m/n$，那么 $\triangle ANQ$ 的形状不依赖于直线 l 的选取. 换句话说 $\angle ANQ = \varphi_1$ 与比 $NQ/NA = k_1$ 都不依赖于 l. 这样，Q 是由 A 经过以 N 为相似中心，转角为 φ_1，相似系数为 k_1 的螺旋相似得到的. 所以，所有这种点 Q 的轨迹是一个圆，即一个由圆 R（A 点的轨迹）经过上面所述的螺旋相似得到的圆.

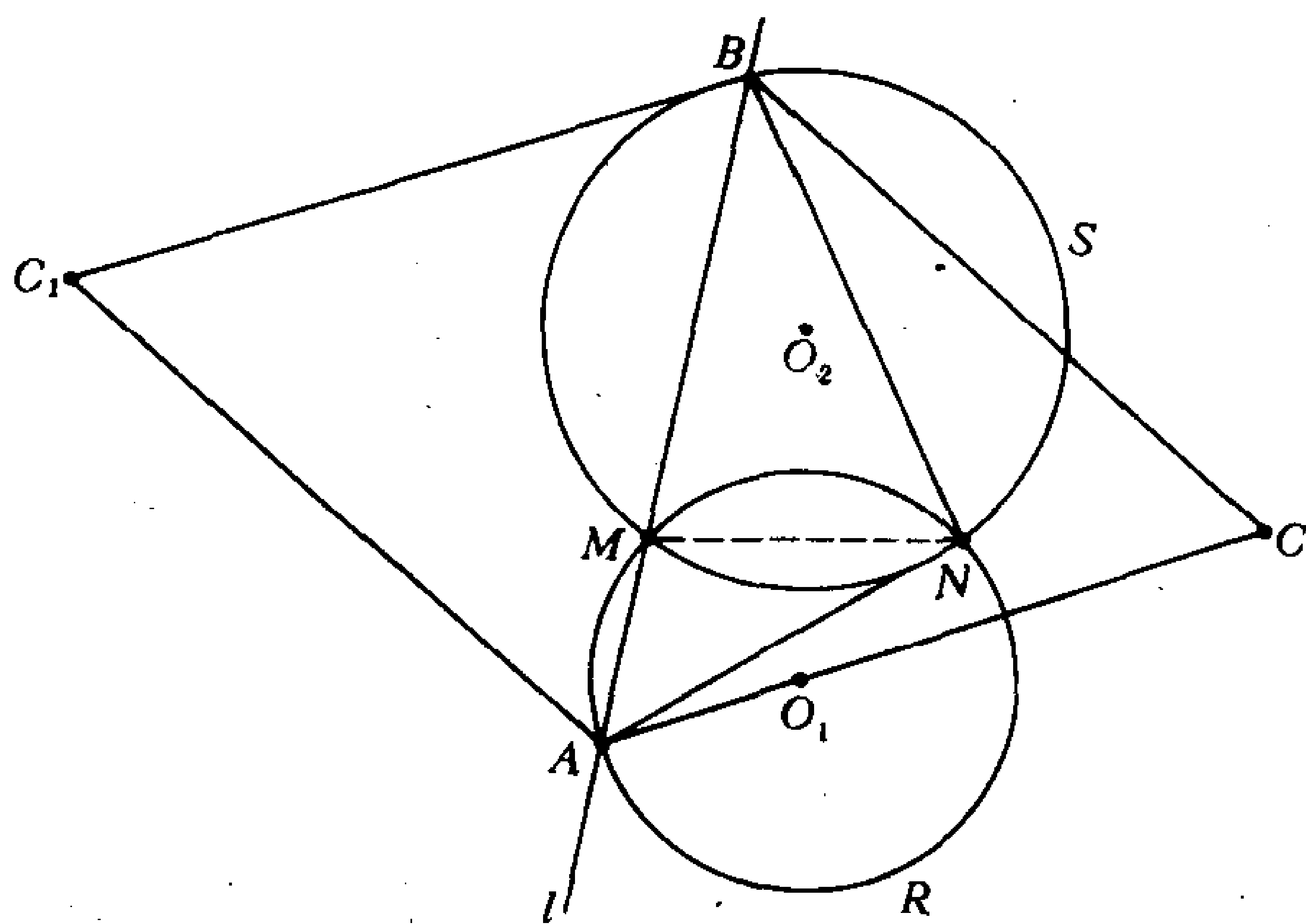


图 98

用几乎同样的方式，我们可以解等边三角形 ABC 的顶点 C 的轨迹问题，这些三角形 ABC 以 AB 为底边并且位于 l 的同一侧（即或者总与 N 位于 l 的同侧，或者总与 N 位于 l 的异侧）. 在这里 $\triangle ANC$ 的形状也不依赖于 l 的选取. 所以，所求的

轨迹是一个圆，这圆由 R 经过某个螺旋相似得到.如果象题中所述，我们不要求点 C 总在 l 的同一侧，则所求的轨迹由两个圆组成：其中之一是与 N 位于 l 同一侧的点 C 的轨迹，而另一个圆侧是与 N 位于 l 相反一侧的点 C_1 的轨迹(见图 98).(若圆 R 与 S 全等并且 $\angle O_1NO_2=60°$，则C_1 所描出的圆化为一个点 N).

(c) 的解法是类似的. 作线段 NP_1，使它与 AB 平行且有相同的长度和方向. 显然，$\angle ANP_1=\varphi_2$和比$NP_1/NA=k_2$不依赖于 l 的选取. 所以这种点 P_1 的轨迹是由 R 经过中心在 N，转角为 φ_2，相似系数为 k_2的螺旋相似所得到的圆. 这个圆全等于由下述方式得到的圆：从任一固定点 O 出发，引与 AB 平行，相等且方向相同的线段 OP，然后考虑所有这样得到的点 P 的轨迹.

注 解问题 33(a)—(c)的关键是：圆 S 可以由圆 R 经过一个把 R 的点 A 变到 S 的点 B 的螺旋相似得到. 用同样的方法可以证明：若 R 是任一图形，S 是从 R 经过一个把 R 的点 A 变到 S 的点 B 的螺旋相似得到的图形，则以下各种点：

(a) 分线段 AB 成给定比 $AQ:QB=m:n$ 的点 Q；

(b) 作在线段 AB 上的等边三角形 ABC 的顶点 C，这里等边三角形 ABC 的$\angle BAC$ 不仅有定值 60°，而且从射线 AB 到射线 AC 的旋转方向与上述螺旋相似的旋转方向相同；

(c) 从一固定点 O 所引线段 OP 的端点 P，这里线段 OP 与线段 AB 平行、相等且有相同的方向；它们的轨迹都是一个与R和S 相似的图形①.

---

① 或化为一点.

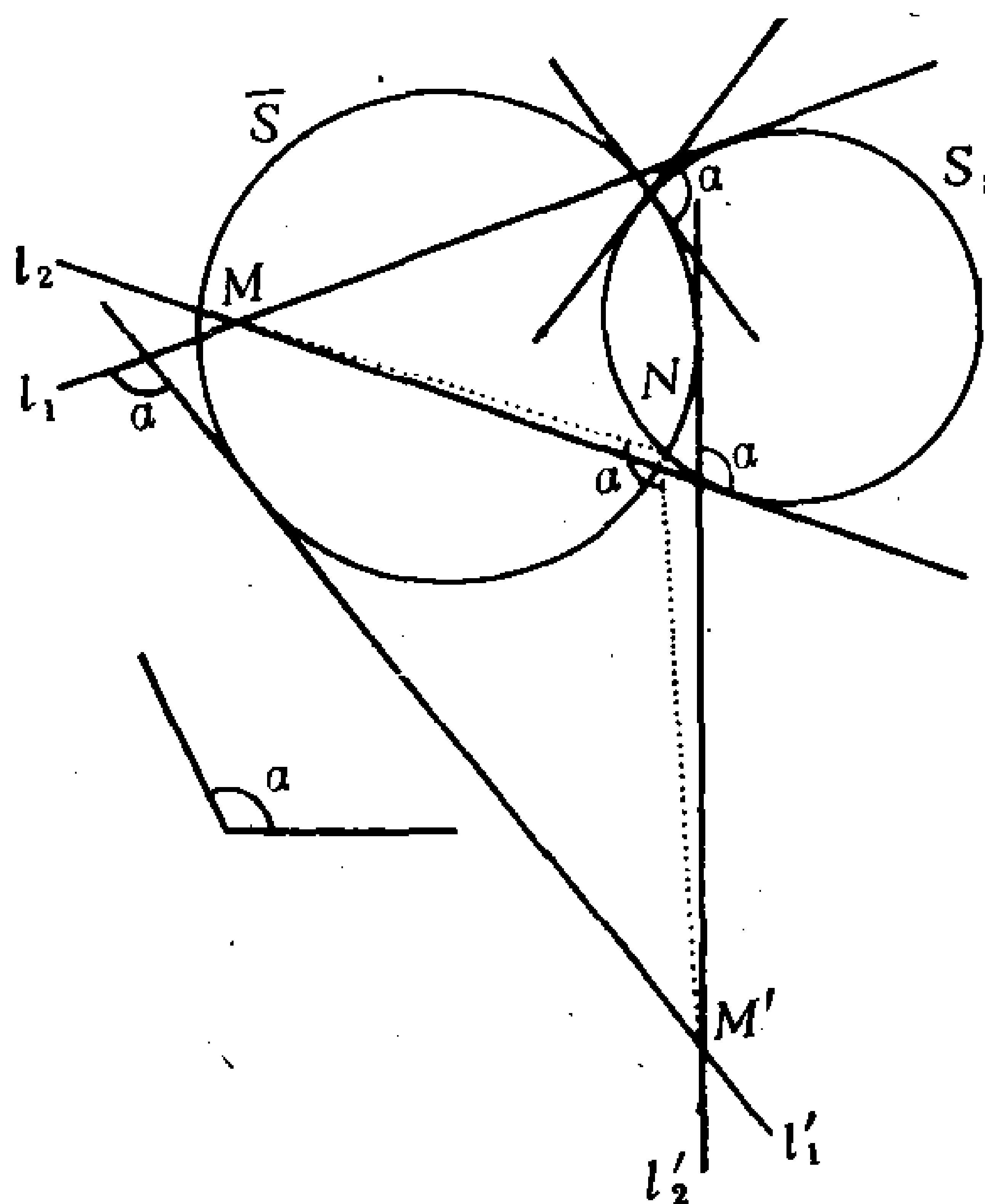


图 99

上述命题的证明正如问题 33 的解一样. 这个注解在以后要用到.

34. 假设问题已解出(图 99). 以 $\bar{S}$ 与 S 的交点 N 为中心，转角为 α，相似系数等于圆 $\bar{S}$ 与 S 的半径之比的螺旋相似把 S 变成 $\bar{S}$. 在这变换下，l_1和l_2 变成与 $\bar{S}$ 相切的直线 l'_1和l'_2，并且 l'_1与l_1，l'_2 与 l_2 都交成 α 角；l_1和l_2 的交点 M 变成 l'_1 和 l'_2 的交点 M'①. 因而有$\angle MNM'=\alpha$.

这就导致下面的作法：引 $\bar{S}$ 的切线 l'_1和l'_2 使之分别与 l_1和l_2 相交成 α 角. 命 M' 是 l'_1和l'_2 的交点，N 是 $\bar{S}$ 与另一个圆的交点，这个圆以 MM' 为弦，并且使得这弦所对的圆周角为 α. 以 N 为中心，转角为 α，相似系数为 NM/NM' 的螺旋相似把 $\bar{S}$ 变成所求的圆 S. 这问题可多达八个解.

35. 命 A, B, C, D, E, F 是所给直线的交点（见图 32). 把 AB 变到 EF 的螺旋相似的中心 O 可以作为三角形 AEC 与 BFC 的外接圆的交点，或作为三角形 ABD 与 EFD 的外接圆的交点被定出〔参看图 30 (b) 和图 31〕. 由此即知这四个圆交于一公共点.

---

① 若 $l_1 /\!/ l_2$，则本题的解法更简单．因为这时我们可以立即找出所求圆的半径 r，所求圆的中心在与 $\bar{S}$ 同心的两个已知圆之一上．这时本题的解可多达四个．

36. (a) 我们将指出如何从点 M_1 得到点 M_2. 作 S_1和S_2的第二个交点 B 与 M_1 的联线. M_1B与S_2交于点 M' (图 100). 不管给定角 α 的位置如何, M' 总是由 M_1 经过同一个螺旋相似得出, 这可以由 $\triangle M_1AM'$ 的形状不依赖于点 M_1 的位置 (因为角 AM_1M' 是圆 S_1 的弧 AB 的一半, 角 $AM'M_1$是圆S_2 的弧 AB 的一半) 这个事实推得. 通过引 $\overline{M}\overline{M}' \perp AB$ (因而 $A\overline{M}_1$与$A\overline{M}'$ 是两圆的直径), 容易知道这个螺旋相似的转角 β 等于 $\angle O_1AO_2$, 并且相似系数是 AO_2/AO_1. 又, $\angle M'AM_2=\beta-\alpha$①, $\angle M'O_2M_2=2(\beta-\alpha)$. 这就是说 M_2是由 M_1 经过中心在 A, 转角为 β, 相似系数为 k 的螺旋相似 (把 M_1 变到 M'), 再接着作一个以 O_2 为中心, 转角为 $2(\beta-\alpha)$ 的旋转 (把 M' 变到 M_2) 得到的. 但是这两个变换之和是一个以某点 O 为中心, 相似系数为 k, 转角为 $-\beta+2(\beta-\alpha)=\beta-2\alpha$ (在图 100 中, 从 AM_1 到 AM' 的旋转方向与从 O_2M' 到O_2M_2 的旋转方向是相反的) 的螺旋相似. 现在仅须注意到

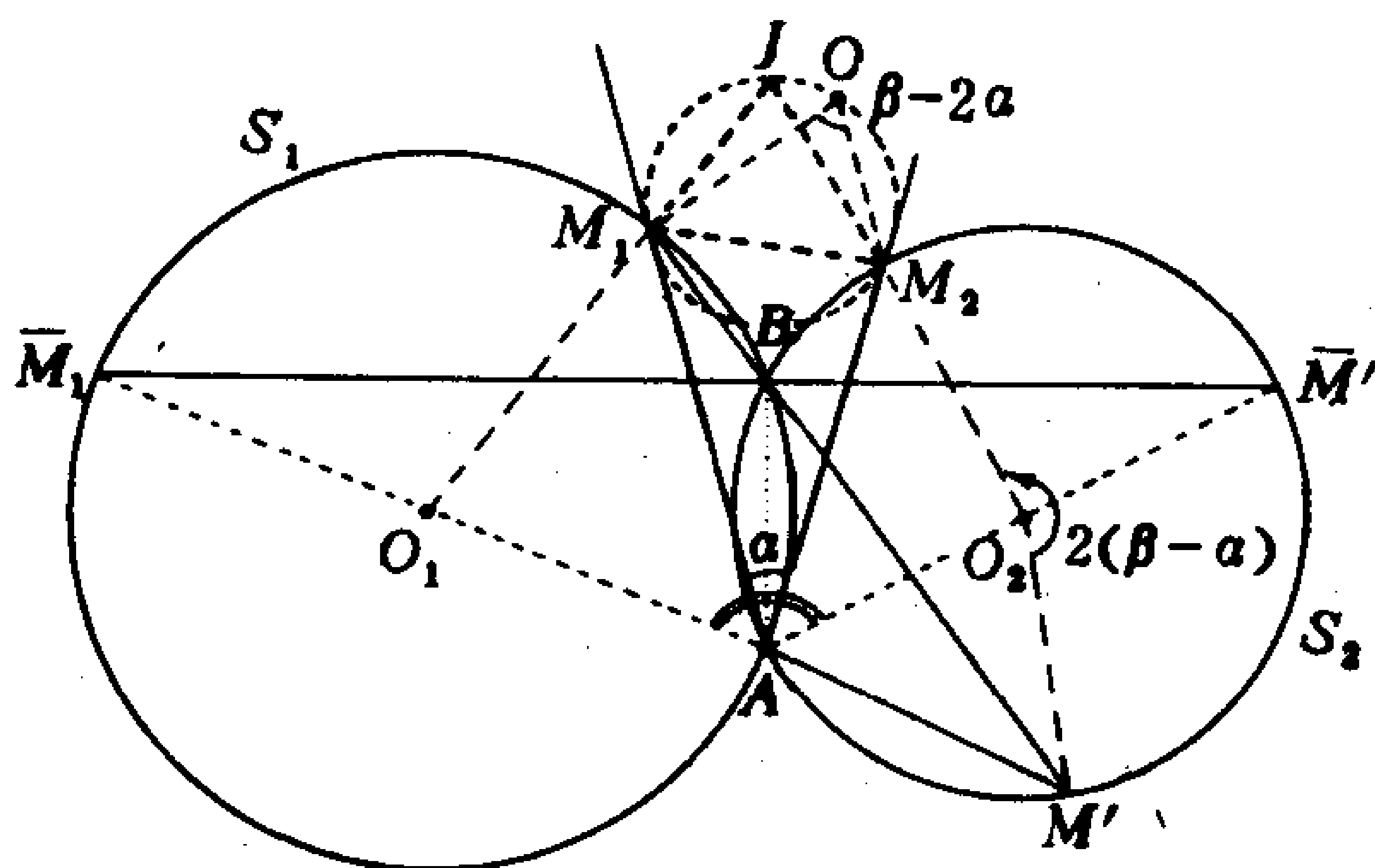


图 100

$$\angle M_1JM_2=\angle AM_1M_2+\angle AM_2M_1$$

---

① 或 $\alpha-\beta$.

$$= \angle O_1M_1A + \angle O_2M_2A - 180°$$
$$= (180° - \angle M_1AM_2)$$
$$+ (\angle O_1AM_1 + \angle O_2AM_2) - 180°$$
$$= (180° - \alpha) + (\beta - \alpha) - 180°$$
$$= \beta - 2\alpha①,$$

即知三角形 M_1M_2J 的外接圆过 O.

(b) 以 A 为中心，转角 $\beta = \angle O_1AO_2$，相似系数 $k = AO_2/AO_1$ 的螺旋相似把 O_1 变到 O_2；以 O_2 为中心，转角为 $2(\beta-\alpha)$ 的旋转保持 O_2 不动. 所以

$$\angle O_1OO_2 = \beta - 2\alpha, \quad 并且 \ \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{AO_2}{AO_1}$$

〔见 (a) 的解〕. 因为比 $OO_2/OO_1 = AO_2/AO_1$ 是固定的，点 O 的轨迹是圆（见第 42 页上的注），这个圆过点 A（在 $\alpha=\beta$ 时，O 与 A 重合）和 B(在 $\alpha=0$ 时,O 与 B 重合).

37. 命 $A_1A_2\cdots A_n$ 是所求的 n 边形（图 101）. 由本题的假设，点 M_1, M_2, …, M_n 已给定，我们知道 $\angle A_1M_1A_2 = \alpha_1$, $\angle A_2M_2A_3 = \alpha_2$, …, $\angle A_nM_nA_1 = \alpha_n$，并且知道 $M_1A_2/M_1A_1 = k_1$, $M_2A_3/M_2A_2 = k_2$, …, $M_nA_1/M_nA_n = k_n$. 现在依次作以 M_1 为中心，转角为 α_1，相似系数为 k_1 的螺旋相似，以 M_2 为中心，转角为 α_2，相似系数为 k_2 的螺旋相似等等，最后作以 M_n 为中心，转角为 α_n，系数为 k_n 的螺旋相似. 在这些变换下，点 A_1 将依次地变到 $A_2, A_3, \cdots, A_n$，最后变到位置 A_1. 这样，A_1 是 n 个

---

① 这个式子可以推导如下：

$$\angle M_1JM_2 = 180° - \angle JM_1M_2 - \angle JM_2M_1$$
$$= \angle O_1M_1M_2 + \angle O_2M_2M_1 - 180°$$
$$= (180° - \alpha) + (\beta - \alpha) - 180° = \beta - 2\alpha.$$

中心分别在 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，转角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，系数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的螺旋相似之和的不动点.

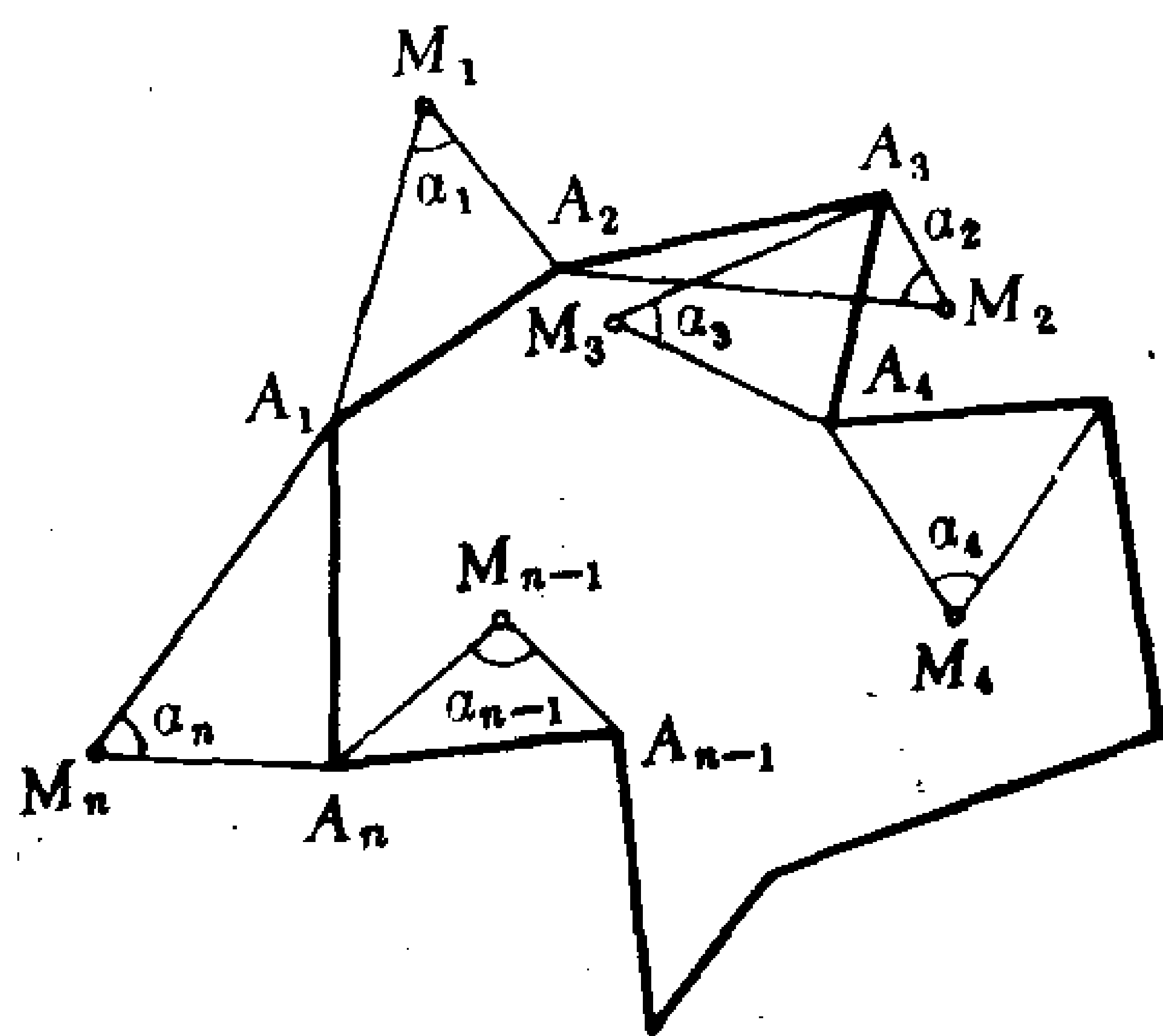


图 101

这些螺旋相似的和一般是一个新的螺旋相似（转角为 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，相似系数等于 $k_1k_2\cdots k_n$）. 因为螺旋相似的仅有不动点是它的中心，由此可见，A_1 必定是所得到的新螺旋相似的中心. 通过作 $(n-1)$ 次两个已知螺旋相似之和的螺旋相似中心，就可以找到 A_1. 更简单的作法是找平面上任一线段 BC 在这 n 个螺旋相似之和作用下所变成的线段 $B'C'$，然后再作出把 BC 变到 $B'C'$ 的螺旋相似中心. 在找到了 A_1 之后，作出 n 边形的其余 $n-1$ 个顶点就没有困难了.

若 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是360° 的倍数，并且 $k_1k_2\cdots k_n=1$，则这些螺旋相似之和是一个平移. 因为平移根本没有不动点，所以在这种情况下问题无解.

可能遇到这些螺旋相似之和是恒等变换（即平移的距离为 0）. 在这种情形，问题的解不定：我们可以选取平面上任意一点作为所求 n 边形的顶点 A_1.

38. (a) 点 B 由点 A 经过中心为 N，相似系数 $k_1=r_2/r_1$，转角为 $\angle O_1NO_2$ 的螺旋相似得到，其中 r_1 和 r_2 分别是圆 S_1 和 S_2 的半径，O_1 和 O_2 分别是圆 S_1 和 S_2 的中心（参看问题 33 的解）. 类似地，点 C 由点 B 经过中心在 M，系数 $k=r_1/r_2$，转

角为 $\angle O_2MO_1$ 的螺旋相似得到（图 102）. 这两个螺旋相似之和把 A 变到 C. 但是两个螺旋相似之和还是一个螺旋相似，它的系数 $k=k_1k_2=(r_2/r_1)(r_1/r_2)=1$，转角为 $\angle O_1NO_2+\angle O_2MO_1=2\angle O_1NO_2$（因为 M，N 关于直线 O_1O_2 对称，所以 $\angle O_2MO_1=\angle O_1NO_2$）. 由于相似系数 $k=1$，这个螺旋相似实际上是一个通常的旋转. 又因为这旋转把 S_1 的任意一点 A 变到 S_1 的某个点 C，即它把 S_1 变到自身，所以这旋转的中心是 S_1 的中心 O_1. 最后，正如 C 可以由 A 经过绕点 O_1，转角为 $2\angle O_1NO_2$ 的旋转得到一样，点 E 也可以由 C 经过绕点 O_1，转角为 $2\angle O_1NO_2$ 的旋转得到. 于是，E 由 A 经过绕 O_1，转角为 $4\angle O_1NO_2$ 的旋转得到. 由于 $4\angle O_1NO_2$ 不依赖于 A 的位置，所以断言(a)成立.

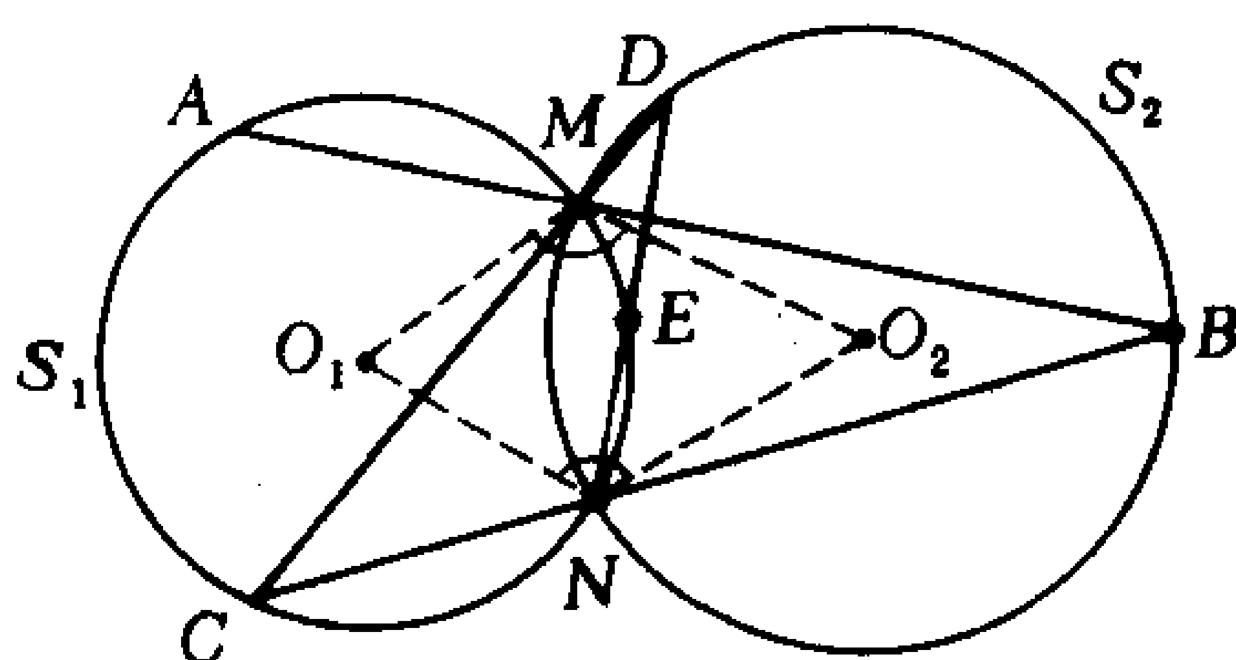


图 102

(b) 若 $4\angle O_1NO_2=360°$，即若 $\angle O_1NO_2=90°$，则 E 与 A 重合. 换句话说，若两圆 S_1 和 S_2 垂直相交，即 S_1 与 S_2 的交角为 90°（两圆交角的定义见问题 34 的叙述），则 E 与 A 重合.

39. (a) A_2由A_1经过中心在 N，系数 $k_1=r_2/r_1$，转角为 $\angle O_1NO_2$ 的螺旋相似得到；A_3由A_2经过中心在 N，系数 $k_2=r_3/r_1$，转角为 $\angle O_2NO_3$ 的螺旋相似得到；A_4由A_3经过中心在 N，系数 $k_3=r_1/r_3$，转角为 $\angle O_3NO_1$ 的螺旋相似得到；这里 O_1,O_2,O_3 分别是圆 S_1,S_2,S_3 的中心，r_1,r_2,r_3 分别是它们的半径（参看问题 33 的解）. 因为

$$k_1k_2k_3=\frac{r_2}{r_1}\frac{r_3}{r_2}\frac{r_1}{r_3}=1,$$

并且 $\angle O_1NO_2+\angle O_2NO_3+\angle O_3NO_1=360°$，所以这三个螺旋相似之和是一个平移. 又因为这个平移把圆 S_1 的每个点 A_1 变到同一圆上的点 A_4，即它把 S_1 变到自身，所以这个平移必定是恒等变换. 于是 A_4是由A_1 经过恒等变换得到的，即有 $A_4=A_1$.

显然，这个问题的结论可以推广到相交于一个公共点的任意多个圆的情形. 在图 103 中我们画出了四个圆交于一个公共点的情形. 点 A_5 是由 A_1 经过四个螺旋相似之和得到的. 但这个和是恒等变换，所以 $A_5=A_1$.

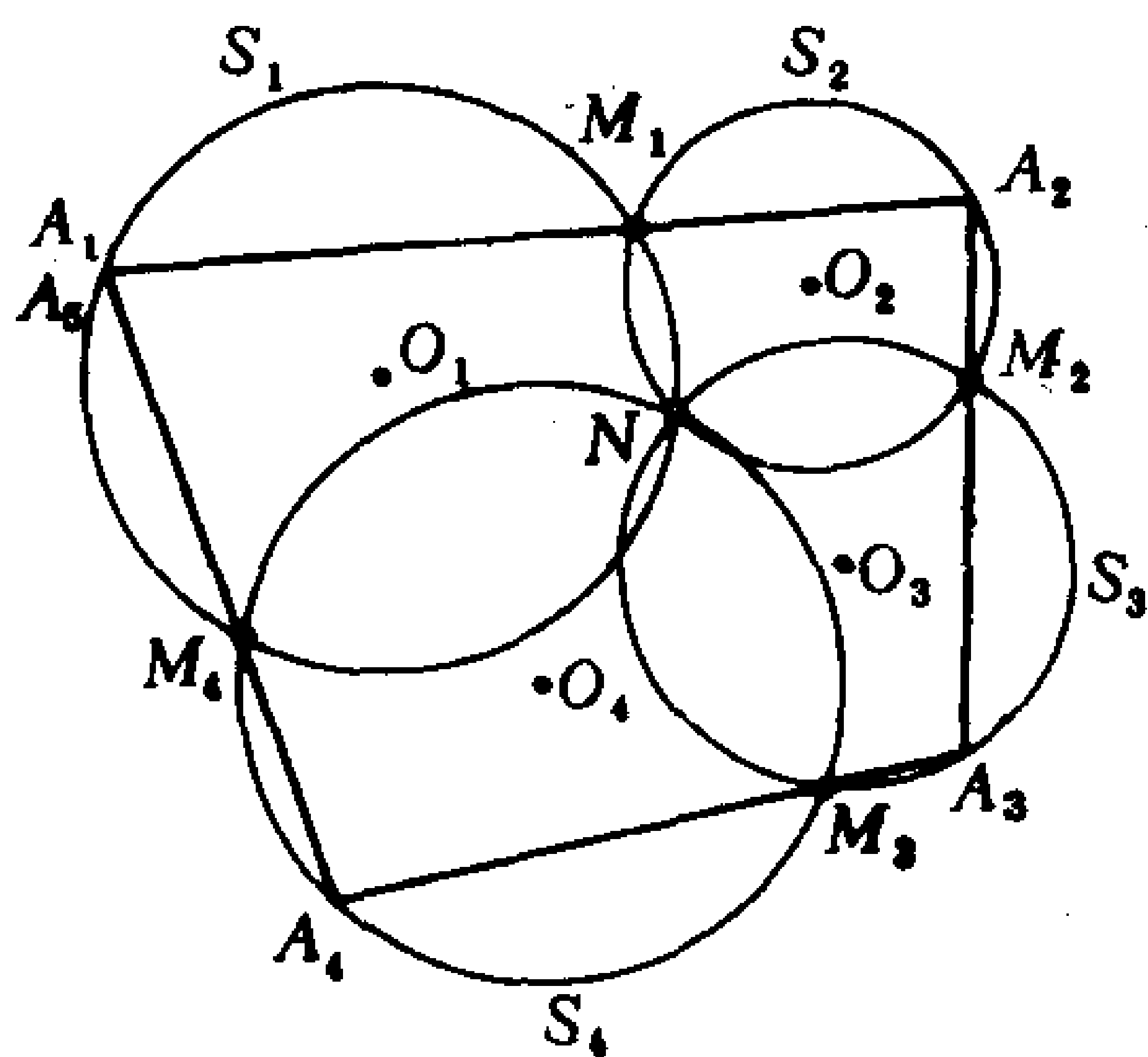


图 103

(b) 命 O_i和r_i表示圆 S_i 的中心和半径($i=1,2,3$). 点 A_2由A_1 经过中心在 N_1，系数为 $k_1=r_2/r_1$，转角为 $\angle O_1NO_2$ 的螺旋相似得到(参看问题 33 的解). 同样，A_3,A_4,A_5,A_6,A_7 是由 A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 分别经过中心在 N_2，系数 $k_2=r_3/r_2$，转角为 $\angle O_2NO_3$，中心在 N_3，系数 $k_3=r_1/r_3$，转角为 $\angle O_3N_3O_1$，中心在 M_1，系数 $k_4=r_2/r_1(=k_1)$，转角为 $\angle O_1M_1O_2$，中心在 M_2，系数 $k_5=r_3/r_2(=k_2)$，转角为 $\angle O_2M_2O_3$，中心在 M_3，系数 $k_6=r_1/r_3(=k_3)$，转角为 $\angle O_3M_2O_1$ 的螺旋相似得到的. 于是 A_7由A_1 经过连续作 6 个螺旋相似得到. 因为

$$k_1k_2k_3=\frac{r_2}{r_1}\ \frac{r_3}{r_2}\ \frac{r_1}{r_3}=1,$$

所以这些螺旋相似的前三个之和是通常的旋转. 这个旋转把圆 S_1 的任意一点 A_1 变到同一圆上的点 A_4，即它把 S_1 变到自

身. 因此前三个螺旋相似之和是绕 O_1 的转角为

$$\alpha=\angle O_1N_1O_2+\angle O_2N_2O_3+\angle O_3N_3O_1$$

的旋转.

同样，后三个螺旋相似之和也是绕 O_1 的旋转，它的转角为

$$\beta=\angle O_1M_1O_2+\angle O_2M_2O_3+\angle O_3M_3O_1.$$

因为原来的六个螺旋相似之和与这两个绕 O_1 的旋转之和是相同的，所以它是一个绕 O_1 的转角为 $\alpha+\beta$ 的旋转. 我们现在来证明 $\alpha+\beta=0$. 事实上，因为

$$\angle O_1N_1O_2=-\angle O_1M_1O_2,\quad \angle O_2N_2O_3=-\angle O_2M_2O_3,$$
$$\angle O_3N_3O_1=-\angle O_3M_3O_1,$$

所以 $\alpha=-\beta$〔见图 35(b)〕.

这样，我们的 6 个螺旋相似之和是一个绕 O_1 的转角为 0 的旋转，即它是恒等变换. 因为这恒等变换把 A_1变到A_7，这就证明了 $A_1=A_7$.

这个问题的结果可以推广到任意多个两两相交的圆的情形.

40. (a) 首先设 l 是一个半径比圆 S_1和S_2 的半径大得多的圆，并且对这种情形应用问题 39 (b) 的结果. 现在如果让 l 的半径无限增大，使得 l 变得越来越逼近一条与圆 S_1和S_2 相交的直线，取极限即得本题所要的结果(参看问题 24 的解).

(b) 若我们移动直线 l，使得点 K 与 L 重合，并且使得点 P 与点 Q 重合，即移动 l 使它成为 S_1和S_2 的公切线，则 (a) 的结果就变成(b)的结果.

41. 假设$\triangle ABC$ 已作好(图 104). 以 A 为中心，以 l 为轴，相似系数为 n/m 的膨胀反射把点 B 变到点 C. 所以点 C 同时

在圆 S_2 和圆 S'_1 上，这里的 S'_1是由S_1 经过所述的膨胀反射得到的(图 104). 本题可以有两个解，一个解或无解.

42. 假设四边形 $ABCD$ 已经作好. 以 A 为中心，以 AC 为轴，相似系数为 AB/AD 的膨胀反射把$\triangle ADC$ 变成$\triangle ABC'$ (图 105).

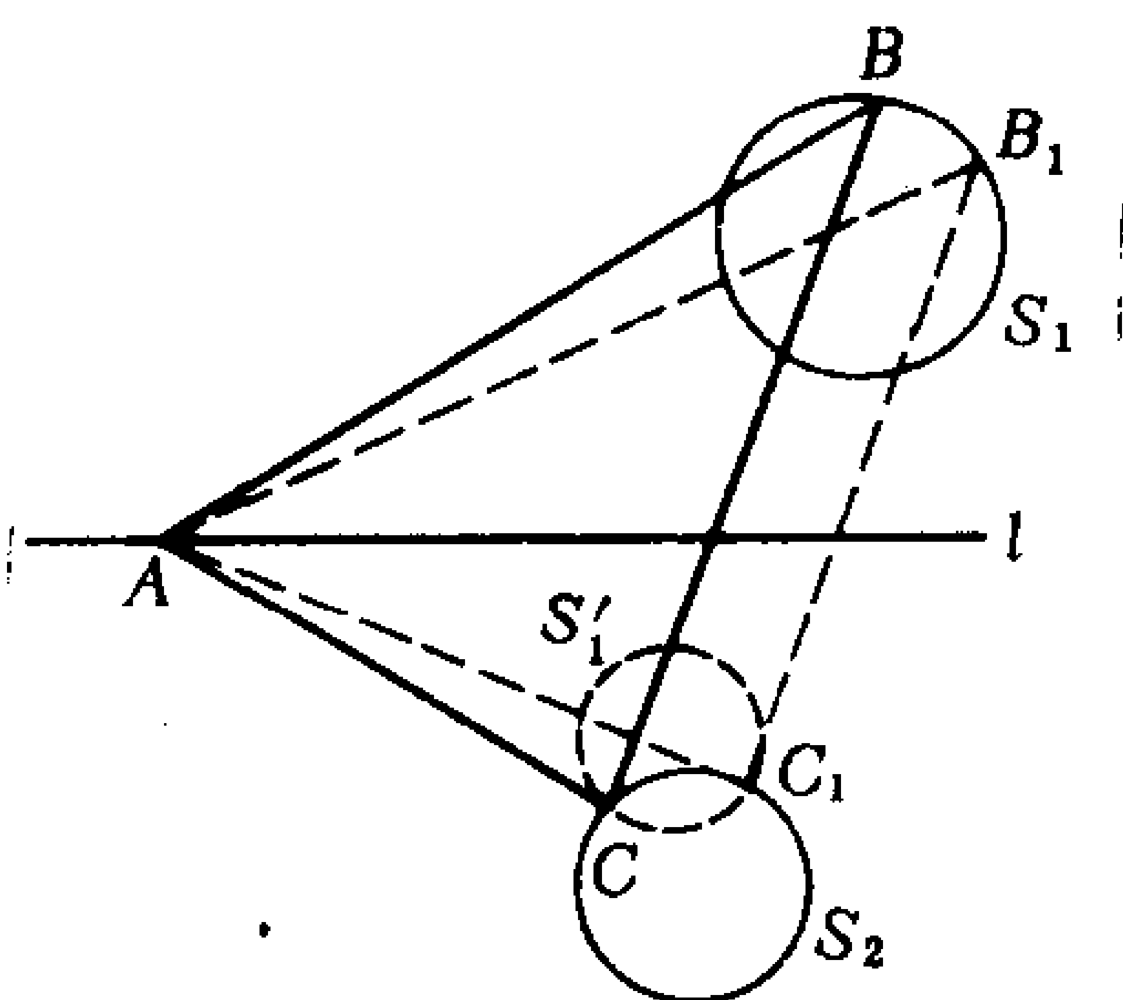


图 104

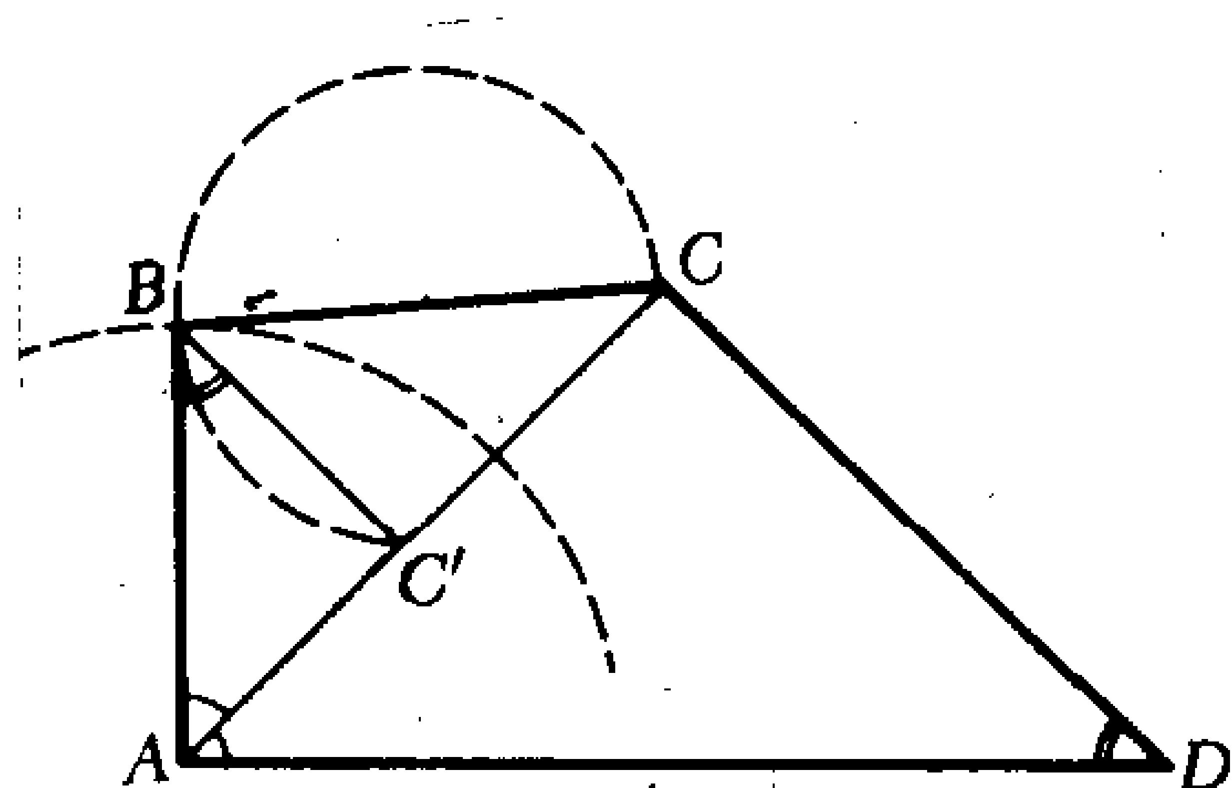


图 105

(a) AC 与 $AC' = AC(AB/AD)$ 是已知的，因而我们可以在某直线上作出这些线段. 又由$\angle ABC' = \angle ADC$，所以

$$\angle C'BC = \angle ABC - \angle ADC = \angle B - \angle D$$

是已知的. 于是 B 就是张在弦 CC' 上，并且所含圆周角等于 $\angle B - \angle D$ 的圆弧①与以 A 为中心，半径等于 AB 的圆的交点. 现在容易找出顶点 D. 这个问题最多有一个解.

(b) 因为$\triangle CBC'$ 的边 BC 与 $BC' = DC(AB/AD)$ 及

$$\angle C'BC = \angle B - \angle D$$

---

① 关于弧的作法的细节，见《Hungarian Problem Book I》中问题 1895/2，第 30 页上的注.

是已知的，这个三角形可以作出. 顶点 A 就是直线 $C'C$ 上使得 $AC'/AC=AB/AD$ 的点. 本题有唯一解.

(c) 在这种情形，我们知道比

$$\frac{BC}{BC'}=\frac{BC}{CD(AB/AD)}=\frac{BC}{CD}\frac{AD}{AB}.$$

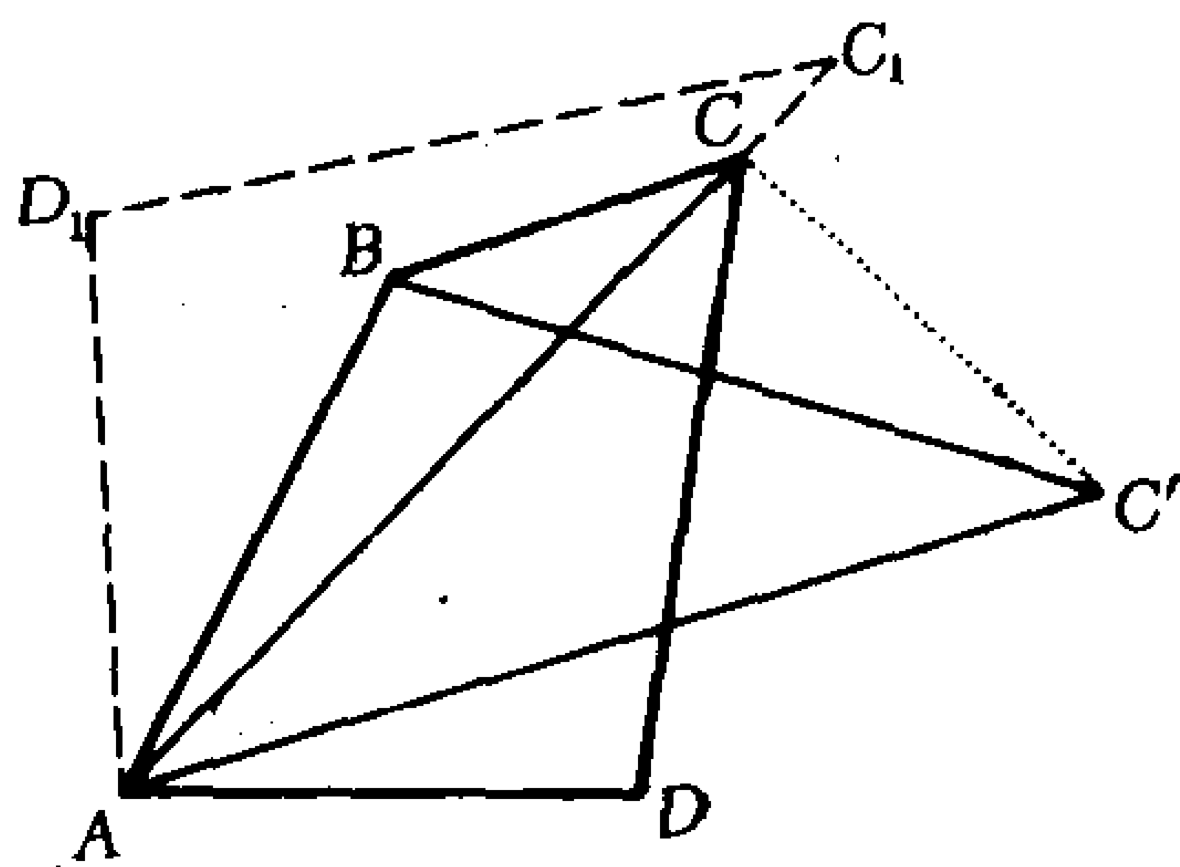


图 106

点 B 就是到 C 和 C' 的距离之比有给定值 $(BC/CD)\cdot(AD/AB)$ 的点的轨迹（见第 42 页上的注）与以 A 为心，AB 为半径的圆的交点. 本题最多有一解.

43. 在作了以 A 为中心，以 AC 为轴，相似系数为 AB/AD 的膨胀反射之后，接着再作一个以 A 为中心，转角为 γ 的旋转，把$\triangle ADC$ 变到$\triangle ABC'$（见图 106）. 剩下部分的作法类似于问题 42 的解.（在解类似于 42(b) 的问题时，顶点 A 可作为到 C' 和 C 的距离之比有定值 AB/AD 的点的轨迹与张在弦 CC' 上并且所含的圆周角等于 γ 的弧的交点而定出.）

44. (a) 设 l_1和l_2 在 O 点相交并构成 α 角〔图 107 (a)〕.（若 $l_1 /\!/ l_2$，则这个问题没有意义：在这种情形下，仅当 M 与 l_1和l_2 等距时线段 PQ 存在，因此 M 不能描出一圆.）$\triangle OPP'$ 与 $\triangle OQQ'$ 相似（因为是有相等底角的两个直角三角形），因而 $OP/OP'=OQ/OQ'$. 所以 $OP/OQ=OP'/OQ'$，亦即 $\triangle OPQ$ 与 $\triangle OP'Q'$ 也相似. 因此，$\triangle OPM$ 与 $\triangle OP'M'$ 是相似的（因为 OM 和 OM' 分别是$\triangle OPQ$ 和 $\triangle OP'Q'$ 的中线）. 这意味着比 $OM'/OM=OP'/OP=\cos\alpha$ 不依赖于点 M 的选取，并且 $\angle M'OP'=\angle MOP$，即 OM 和 OM' 都与$\angle POQ$ 的平分线 l

构成等角. 这样，M' 是由 M 经过以 O 为中心，以 l 为轴，系数 $k=\cos\alpha$ 的膨胀反射得到的. 所以当 M 描出圆 S 时，M' 描出圆 S'，S' 是 S 在上述膨胀反射下的象.

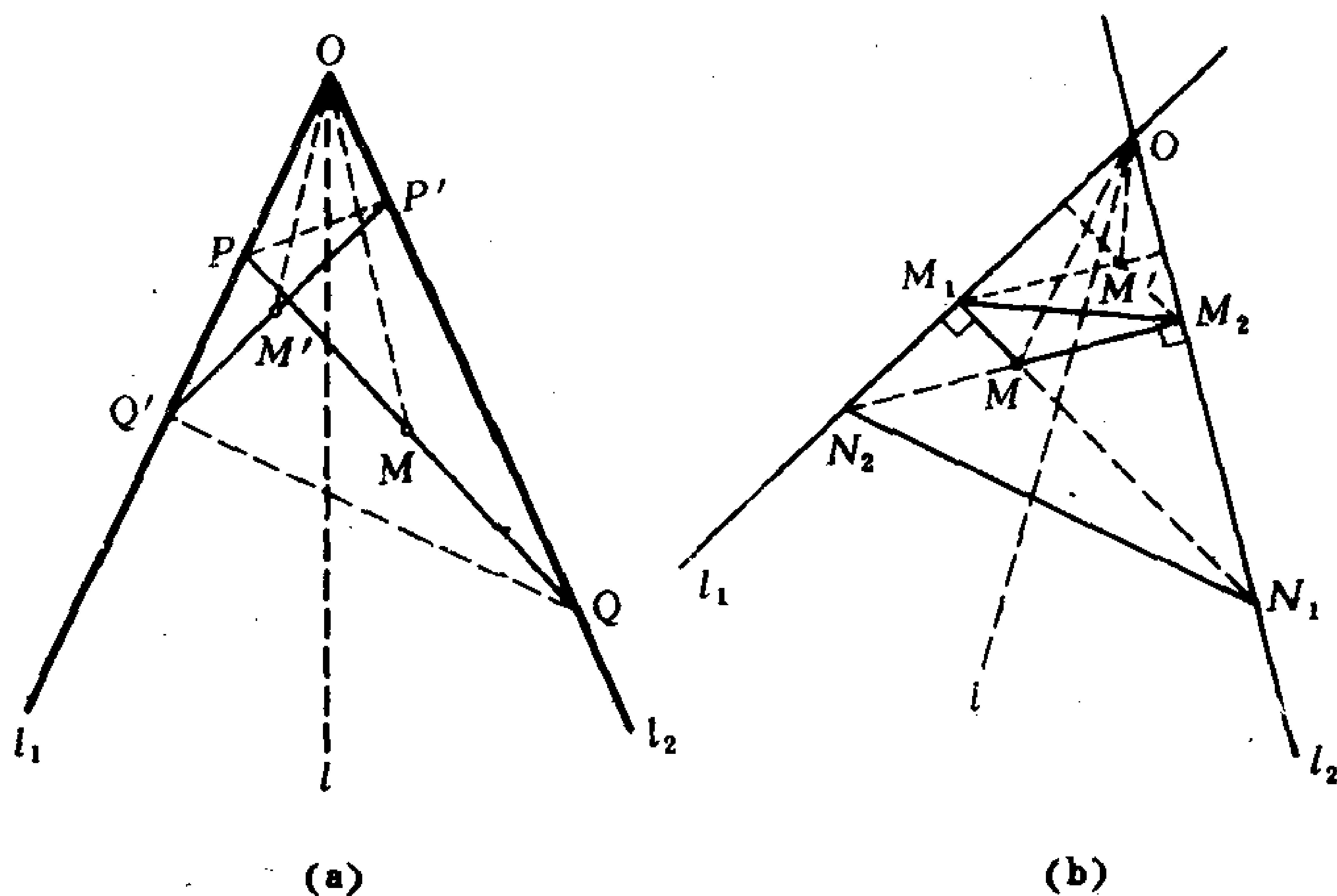


图 107

(b) 首先，若 $\angle M_1OM_2=\alpha=90°$，则平面上的每个点 M 显然变到同一点 $M'=O$. 这样，仅当 $\alpha\neq 90°$ 时问题才是有趣的. 用 N_1表示MM_1与l_2 的交点，N_2表示MM_2与l_1 的交点〔图 107 (b)〕. 正如在 (a) 的解答中一样，我们可以证明 $\triangle OM_1M_2$和$\triangle ON_1N_2$ 是相似的，且有相似系数 $k=OM_1/ON_1=\cos\alpha$〔若点 M_1和M_2 分别扮演 (a) 中的点 P 和 Q 的角色，则那里的点 P' 和 Q' 分别扮演 N_1和N_2 的角色〕. 因为 M 和 M' 分别是相似三角形 ON_1N_2和OM_1M_2 的高的交点，由此可知 $OM'/OM=k=\cos\alpha$，并且 $\angle M'OM_1=\angle MOM_2$. 所以我们知道直线 OM 与 OM' 关于角 M_1OM_2 的平分线是对称的.

这样，(b)中的点 M' 是点 M 经过(a)中由 M 得到 M' 所作的那种膨胀反射得到的. 因此，若 M 描出圆 S，则 M' 也描出圆 S'，S' 正是 S 在上述膨胀反射下的象.

45. (a) 若两个正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的周界有同一走向，即若这两个正方形正向相似，则 $A_1B_1C_1D_1$ 是由 $ABCD$ 经过一个螺旋相似或者平移（见定理 1）得到的. 若 $A_1B_1C_1D_1$ 由 $ABCD$ 经过平移得到，A^*,B^*,C^*,D^* 是线段 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 的中点，则 $A^*B^*C^*D^*$ 也可由 $ABCD$ 经过平移得到，这个平移与原平移方向相同，平移距离是原来的一半〔图 108(a)〕.

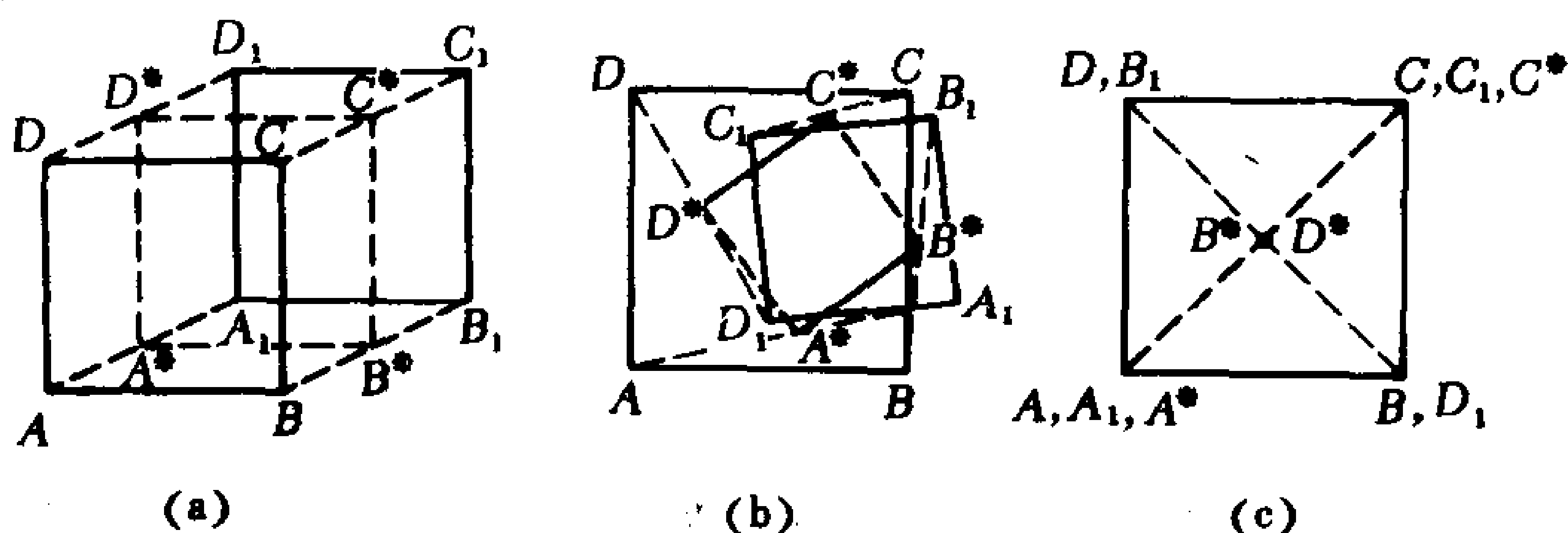


图 108

另一方面，若 $A_1B_1C_1D_1$ 由 $ABCD$ 经过不是中心对称的螺旋相似得到（在中心对称的情形，中点 A^*,B^*,C^*,D^* 全都与旋转中心重合），则由问题 33 的解答后面的注解可知 A^*,B^*,C^*,D^* 必为一个正方形的顶点〔图 108(b)〕.

但是，若正方形 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 的周界走向相反，则结论不再成立. 例如，我们可以考虑当 $A_1=A,C_1=C,B_1=D,D_1=B$ 时的情形〔图 108(c)〕.

(b) 本题也可以用定理 1 和问题 33 的解答后面的注来解〔图 109 (a)，(b)〕. 但是，在 $\triangle A_1B_1C_1$ 是由 $\triangle ABC$ 经过平移

得到的这种更简单的情形，需要特别考虑. 在这种情形下，$\triangle A^*B^*C^*$ 由 $\triangle ABC$ 经过一个平移得到，平移的方向是 AA^*，平移的距离即线段 AA^* 的长度〔图 109(a)〕.

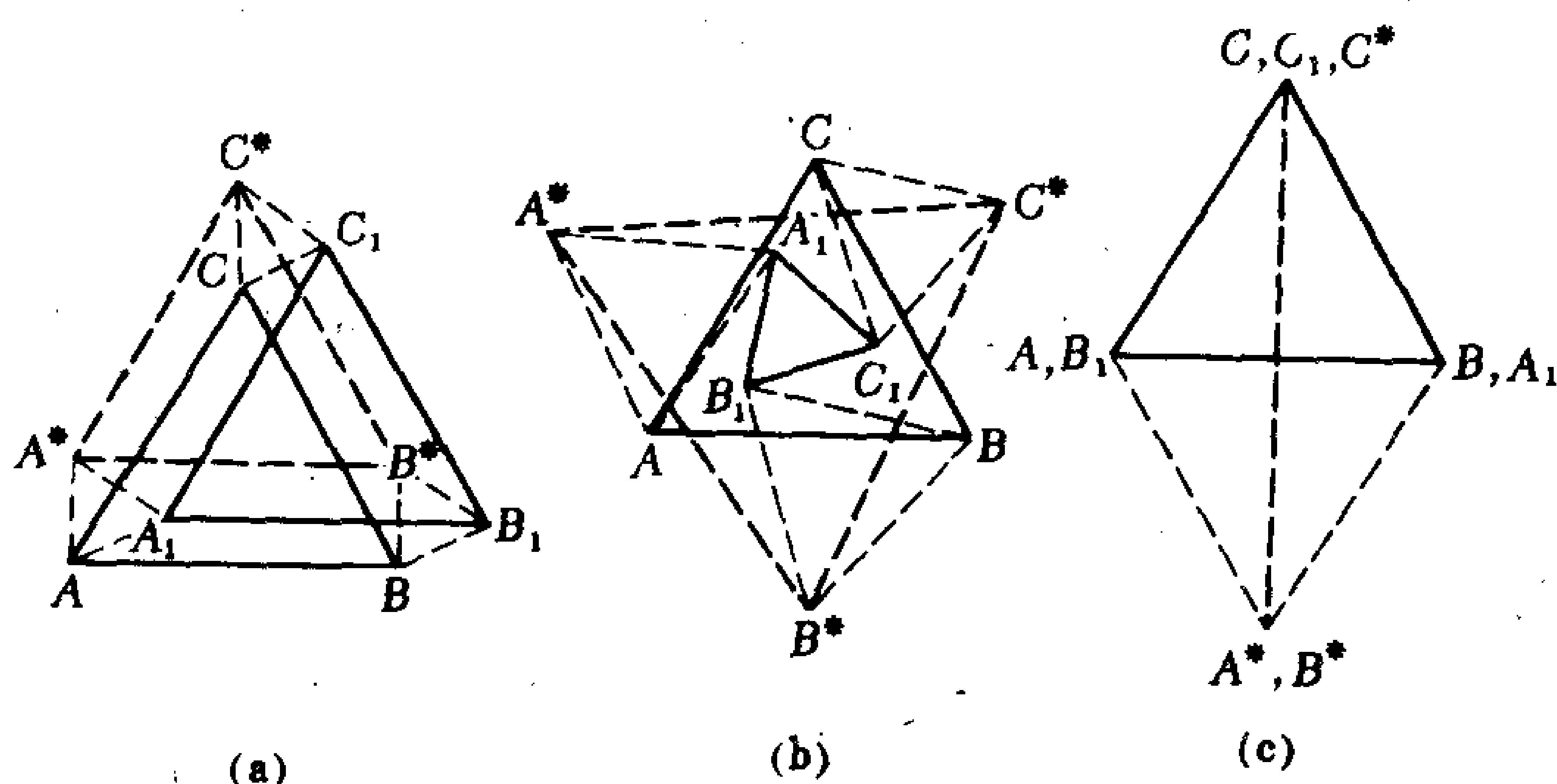


图 109

若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周界走向相同，而这一走向又与 $\triangle AA_1A^*$，$\triangle BB_1B^*$ 和 $\triangle CC_1C^*$ 的周界走向相反，则题中的断语仍然成立. 但是，如果没有关于周界走向的某些假设，断语一般不成立. 例如，见图 109(c).

46. (a) 因为这两个正方形是正向相似图形，由定理 1 可知 $MNPQ$ 是由 $ABCD$ 经过一个平移或者螺旋相似得到的. 在平移的情形，因为所述的四条线段 AM，BN，CP，DQ 有同样的长度，题中的断语是显然的，所以我们假设 $MNPQ$ 是由 $ABCD$ 经过一个螺旋相似得到的.

从某点 O 作线段 OT，OU，OV，OW，使得它们分别与线段 AM，BN，CP，DQ 平行，相等且有相同的方向. 由问题 33 解答后面的注解可知，点 T，U，V，W 是一个正方形的顶点〔图 110

(a)]. 命 Z 是正方形 $TUVW$ 的中心. 对$\triangle OTZ$ 和$\triangle OVZ$ 应用余

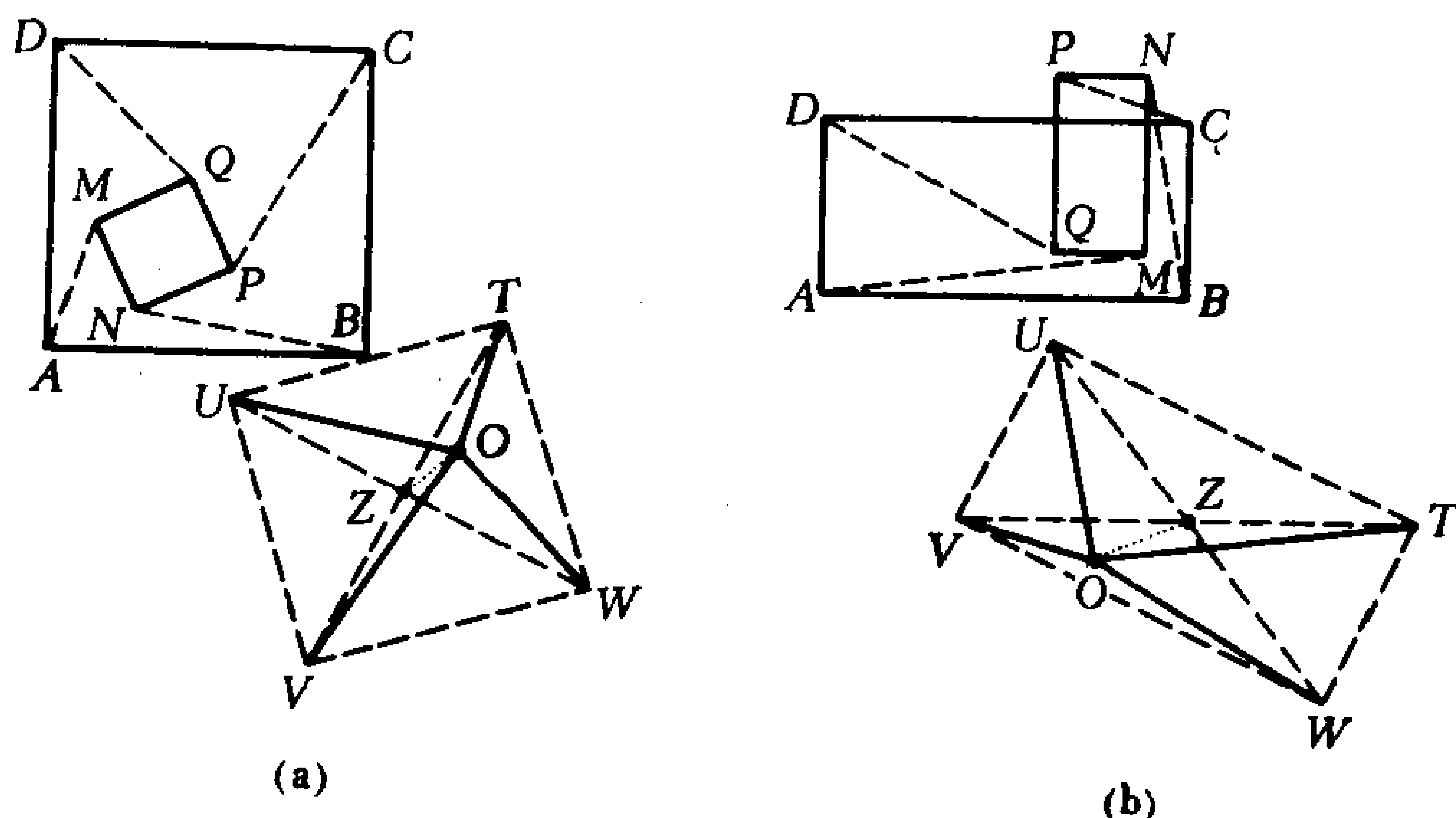


图 110

弦定理,我们有

$$OT^2 = OZ^2 + ZT^2 - 2OZ \cdot ZT\cos\angle OZT$$

和

$$OV^2 = OZ^2 + ZV^2 - 2OZ \cdot ZV\cos\angle OZV$$
$$= OZ^2 + ZT^2 + 2OZ \cdot ZT\cos\angle OZT.$$

由此可得

$$OT^2 + OV^2 = 2OZ^2 + 2ZT^2.$$

用同样的方法,我们可得到

$$OU^2 + OW^2 = 2OZ^2 + 2ZU^2.$$

因为 $ZT = ZU$,所以有

$$OT^2 + OV^2 = OU^2 + OW^2,$$

即有

$$AM^2 + CP^2 = BN^2 + DQ^2.$$

容易看出,当 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 是任意两个正向相似长方

形时〔图 110(b)〕，这个推理仍然成立. 但是，这个结果不能推广到当 $ABCD$ 与 $MNPQ$ 是反向相似的正方形或长方形的情形. 例如，在图 108(c)中，$AA_1=CC_1=0$，而 $BB_1=DD_1\neq 0$，因而 $AA_1^2+CC_1^2\neq BB_1^2+DD_1^2$.

(b) 如(a)中的证明一样. 第二个正六边形是由第一个正六边形经过一个平移或者螺旋相似得到的. 在平移的情形，本题的断言是显然的，所以我们假设第二个正六边形是由第一个正六边形经过一个螺旋相似得到的.

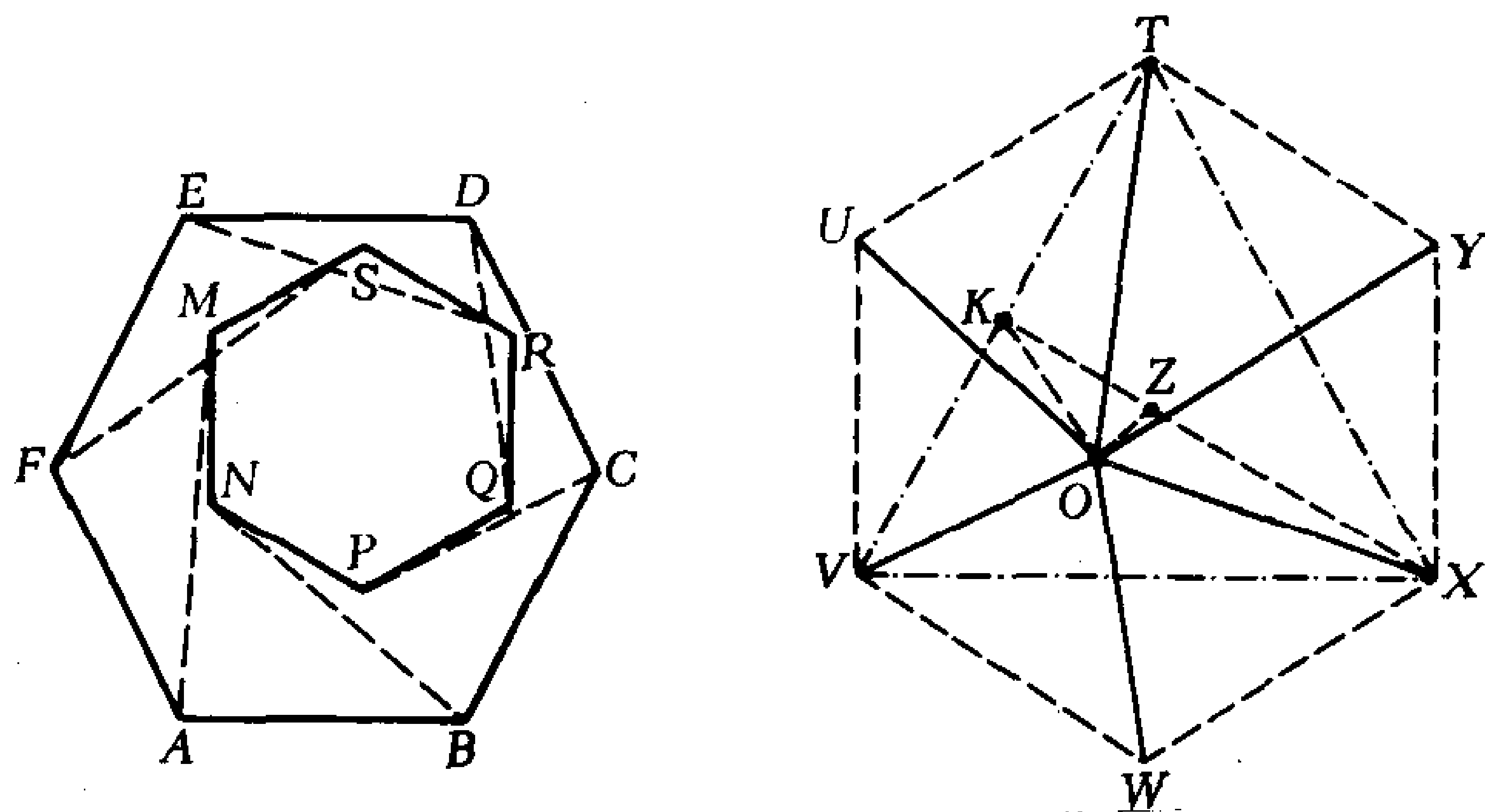


图 111

现在从某点 O 作线段 OT, OU, OV, OW, OX, OY，使它们分别与线段 AM, BN, CP, DQ, ER, FS 平行，相等且有相同的方向. 于是由问题 33 解答后面的注可知，T, U, V, W, X, Y 这六个点是一个正六边形的顶点(图 111). 命 K 表示线段 TV 的中点，Z 表示六边形 $TUVWXY$ 的中心，于是，Z 也是等边三角形 TVX 的重心. 显然，我们有 $XZ:ZK=2:1$. 正如在(a)的解答中一样，我们也可以证明

$$OT^2+OV^2=2OK^2+2KT^2.$$

进一步，对$\triangle OZX$和$\triangle OZK$应用余弦定理，我们有：

$$OX^2 = OZ^2 + ZX^2 - 2OZ \cdot ZX\cos\angle OZX$$

和

$$OK^2 = OZ^2 + ZK^2 - 2OZ \cdot ZK\cos\angle OZK.$$

于是有

$$\begin{aligned} OT^2 + OV^2 &= 2OK^2 + 2KT^2 \\ &= 2OZ^2 + 2ZK^2 - 4OZ \cdot ZK\cos\angle OZK + 2KT^2. \end{aligned}$$

但是$ZK = ZX/2$，并且$\cos\angle OZK = -\cos\angle OZX$. 所以

$$4OZ \cdot ZK\cos\angle OZK = -2OZ \cdot ZX\cos\angle OZX,$$

从而有

$$\begin{aligned} &OT^2 + OV^2 + OX^2 \\ &= 3OZ^2 + 2ZK^2 + 2KT^2 + ZX^2 \\ &= 3OZ^2 + 3ZT^2, \end{aligned}$$

其中最后一个等号由

$$2(ZK^2 + KT^2) + ZX^2 = 2ZT^2 + ZX^2 = 3ZT^2$$

得出.

用同样的方法可以证明

$$OU^2 + OW^2 + OY^2 = 3OZ^2 + 3ZU^2 = 3OZ^2 + 3ZT^2,$$

因此我们有

$$OT^2 + OV^2 + OX^2 = OU^2 + OW^2 + OY^2,$$

即有

$$AM^2 + CP^2 + ER^2 = BN^2 + DQ^2 + FS^2.$$

47. (a) 若X和X'是所求长方形的一对不相邻的顶点(图 112)，于是它们分别在以AB与CD为直径的圆S与S'上. 可以认为这两个圆是具有对应点X和X'的正向相似图形. 由定理 1(第 55 页)，存在一个螺旋相似(或平移)把S变成S'，

并且把点 X 变到点 X'. 这个螺旋相似可用下述方式确定：过点 A 和 C 引任意一对平行直线，设它们分别交圆 S 和 S' 于点 M 和 M'. 因为角 MAX 与角 $M'CX'$ 的对应边平行，所以它们相等. 因此圆 S 的弧 MX 与圆 S' 的弧 $M'X'$ 有同样的角测度. 由此可知，我们的螺旋相似把点 M 变到 M'. 又因为这个螺旋相似把圆 S 的中心 K 变到圆 S' 的中心 K'，这样就把问题归结为寻找一个把已知线段 KM 变成另一已知线段 $K'M'$ 的螺旋相似(或平移)(见第 45—46 页).

设这螺旋相似的中心为 O，转角为 α，相似系数为 k，因为$\angle MOM'=\angle XOX'=\alpha$ 和 $OM'/OM=OX'/OX=k$，所以

$$\triangle OMM' \sim \triangle OXX'.$$

由于$\triangle OXX'$ 的边 XX' 是已知的，我们能求出边 OX，从

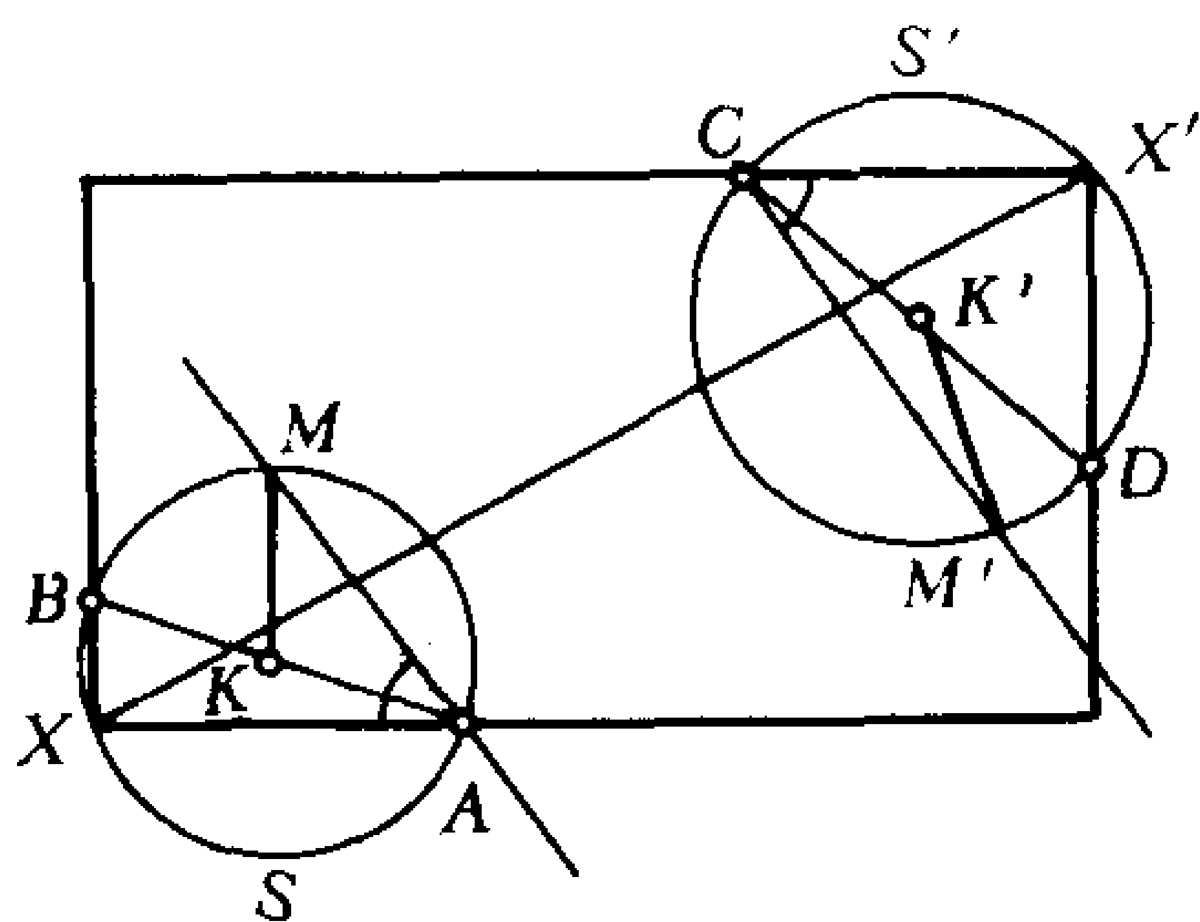


图 112

而点 X 可作为圆 S 与以 O 为心，半径为 OX 的圆的交点而定出来. 本题可以有两个解，一个解或无解. 点 A,B,C,D 可以在所作长方形的边上或它们的延长线上.

特殊情形出现在线段 KM 是由一个平移变到线段 $K'M'$ 的时候(或者换句话说，当线段 AB 与 CD 平行，相等且有相同方向时). 在这种情形下，如果平移的距离不等于给定长方形的对角线长度，则本题无解，否则本题的解不定(因为我们可以选取圆 S 上的任一点作为所求长方形的顶点 X).

(b) 假设这个四边形已作好〔图 113(a)〕. 它的顶点 B 和 D 分别在圆弧 S 和 S' 上，这里 S 和 S' 张在对角线 AC 上，并

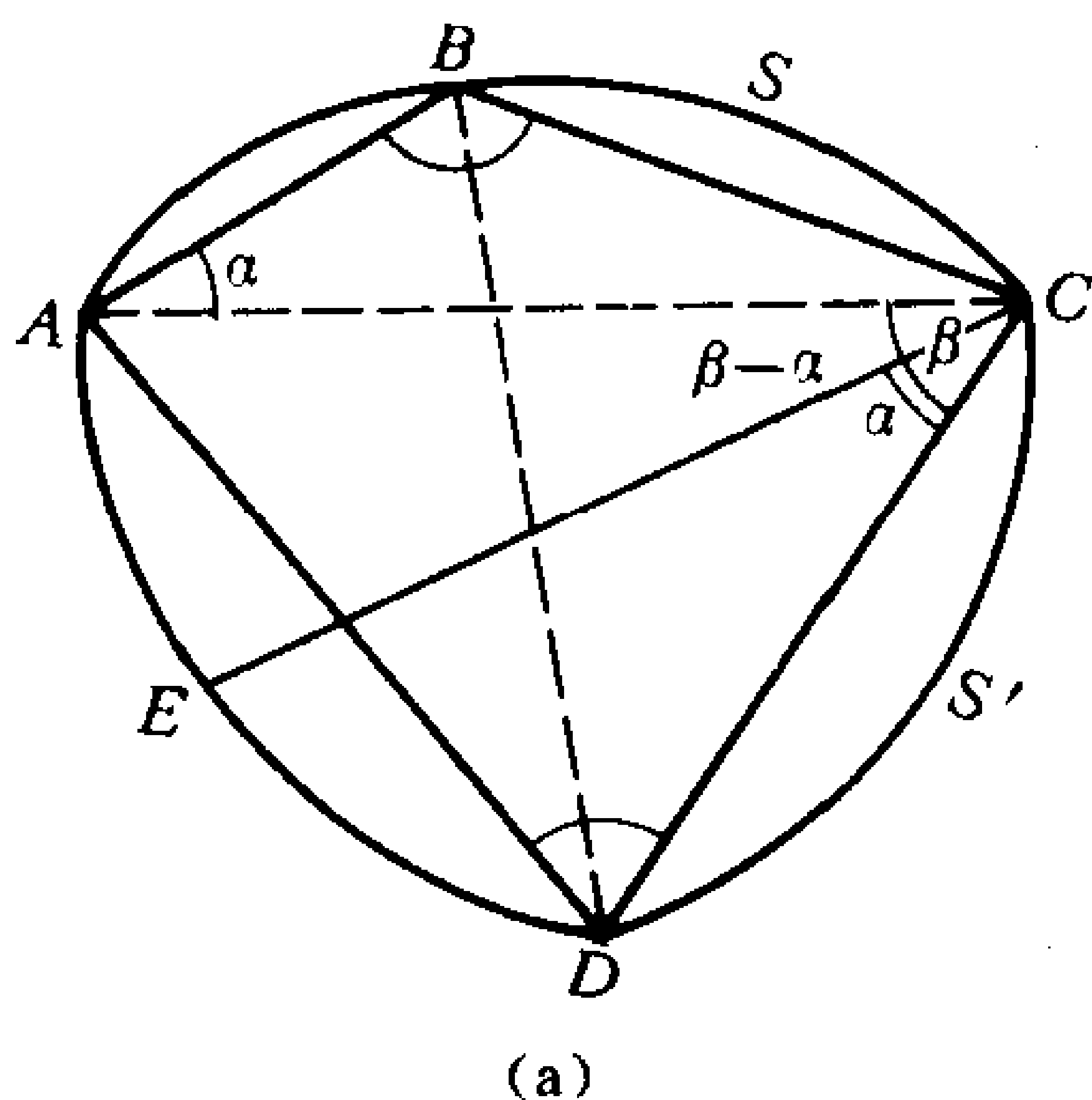
且它们所含的圆周角分别等于给定的角 B 和角 D. 用 α 表示 $\angle BAC$，β 表示 $\angle DCA$. 在三角形 ABC 中我们有

$$\alpha+\angle B+\angle C-\beta=180°,$$

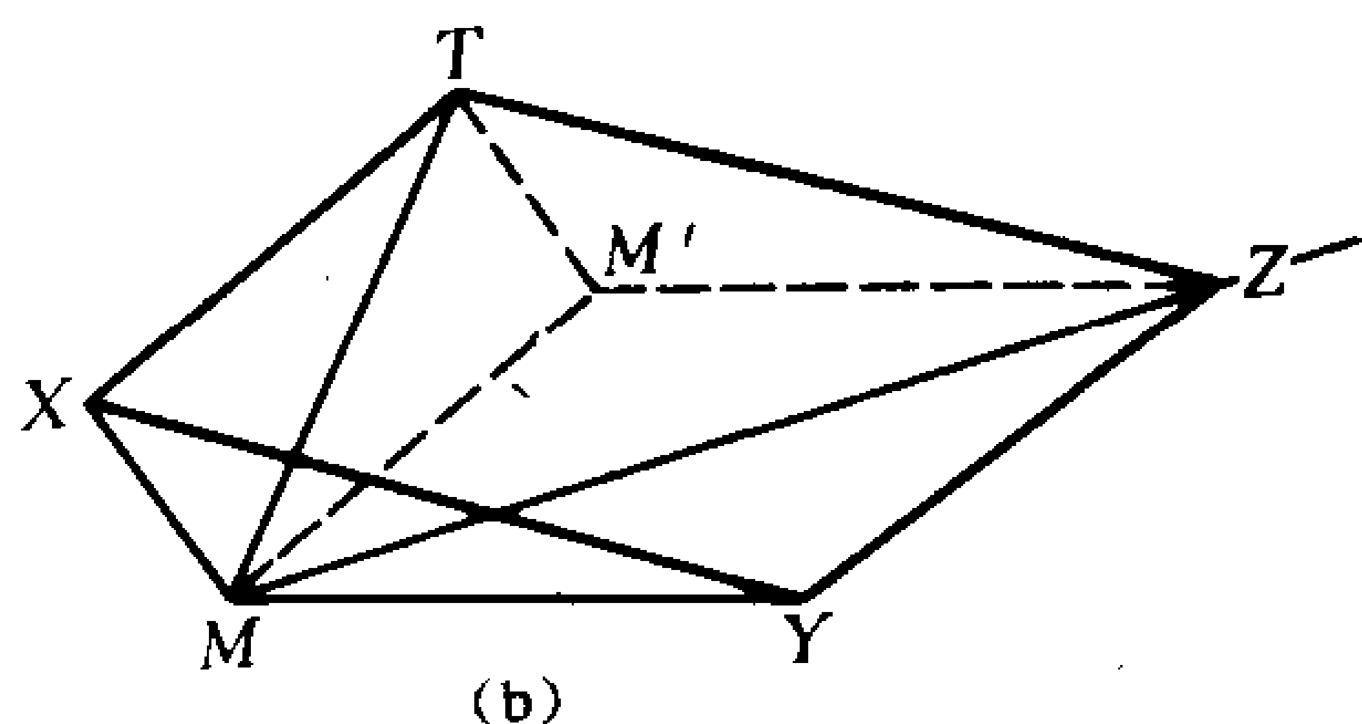
因而

$$\beta-\alpha=\angle B+\angle C-180°,$$

即 $\beta-\alpha$ 是已知的. 为确定起见，假设 $\beta-\alpha>0$. 过 C 引一直线使得它与对角线 AC 的夹角等于 $\beta-\alpha$. 设所引的直线与弧 S' 交于点 E. 于是 $\angle DCE=\beta-(\beta-\alpha)=\alpha$，即 $\angle DCE=\angle BAC$，因而 $\overset{\frown}{DE}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 有同样的角测度.



(a)



(b)

图 113

由此我们得出下面与 (a) 类似的作图法. 以给定线段 AC 为弦作圆弧 S，使它所含的圆周角等于给定的角 B，再以这线段为弦在它的另一侧作圆弧 S'，使它所含的圆周角等于已知角 D. 过点 C 引一直线，使它与 AC 构成角 $\beta-\alpha=\angle B+\angle C-180°$，并且交圆弧 S' 于点 E.

现在如在(a)中一样，本题归结为解下面这样的问题：在圆 S 与 S' 上分别给定点 C 和 E，要在 S 和 S' 上分别找点 B 和 D，使得 $\overset{\frown}{CB}$ 与 $\overset{\frown}{ED}$ 有同样的角测度，并且使得线段 DB 有给定的长

度.

(c) 设 $XYZT$ 是所求的平行四边形. MX, MY, MZ, MT 是四条给定的直线〔图 113(b)〕. 沿 YZ 方向平移△XMY, 平移的距离为 YZ 的长度, 使得线段 XY 与线段 TZ 重合. 若 M' 是 M 的新位置, 则在四边形 $MZM'T$ 中我们知道了对角线 ZT 和 $MM' = YZ$, 以及 $\angle ZMT$, $\angle ZM'T = \angle YMX$, $\angle MTM' = \angle XMT$, $\angle MZM' = \angle YMZ$. 于是本问题归结为(b).

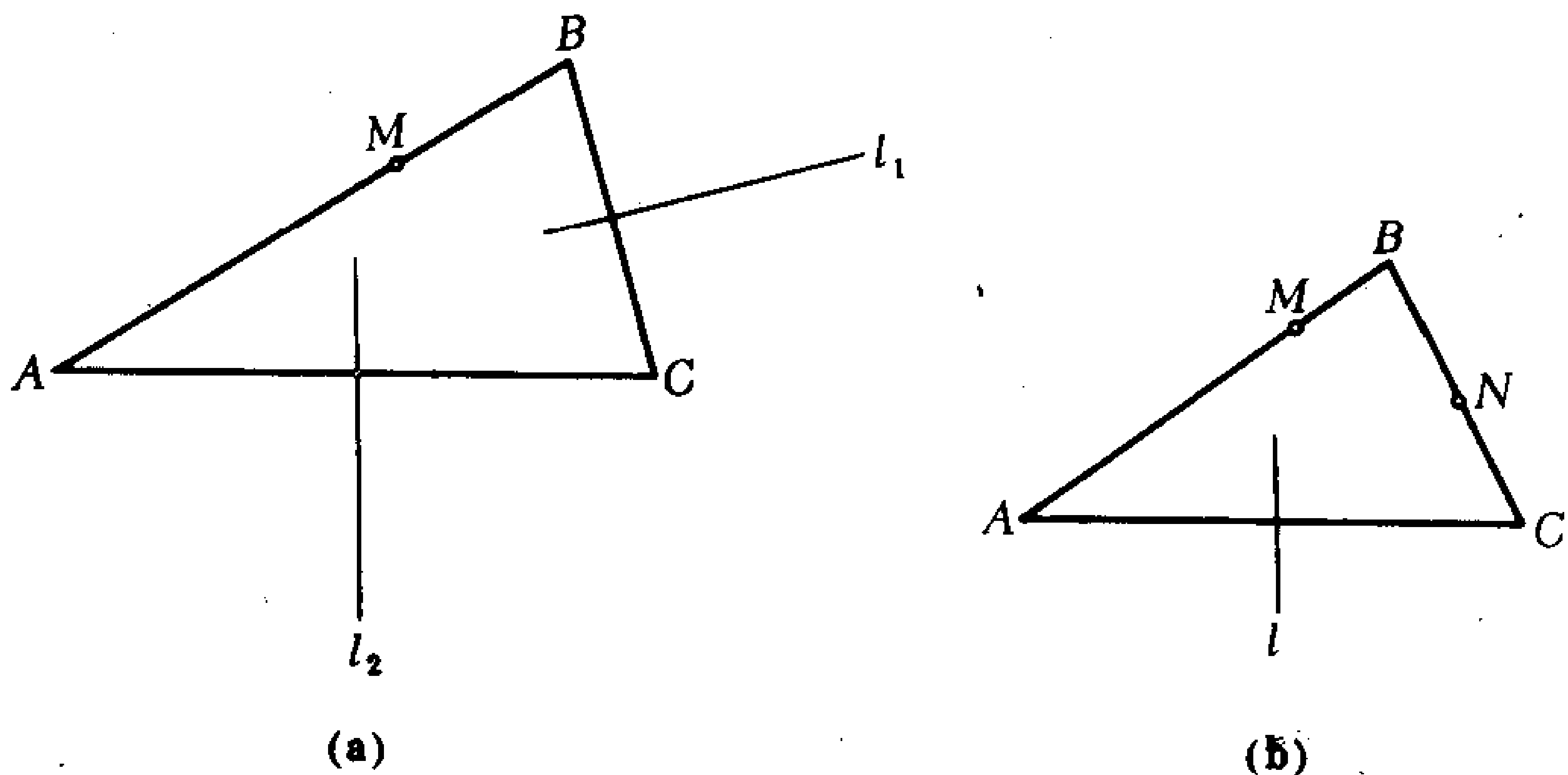


图 114

48. (a) 假设△ABC 已作好〔图 114 (a)〕. 相继地作以 M 为中心, 系数为 $-k$ 的中心相似和两个反射, 其中一个是关于直线 l_1 的反射, 另一个是关于直线 l_2 的反射. 这时点 A 首先变到 B, 然后 B 变到 C, 最后 C 变到 A. 于是 A 是上述的中心相似与两个关于直线的反射之和的不动点. 这个和是一个把每个图形 F 变成正向相似于 F 的图形 F' 的变换, 由定理 1, 它是一个螺旋相似. 不难找出这个螺旋相似的中心 O. 为此只需作出平面上任意一条线段 PQ 在这三个变换之和的作用下的象 $P'Q'$, 然后找出这两条线段的旋转中心 (见第 44 —45

页). 顶点 A 必定与点 O 重合(因为螺旋相似仅有的不动点是中心). 点 A 作出以后，容易找到所要作的三角形的另外两个顶点 B 和 C. 若 $k=1$ 并且 $l_1 \perp l_2$，则本题或是无解或是解不定；在所有其它的情形，本题有唯一解(参看问题 37 的解).

(b) 假设$\triangle ABC$ 已作好〔图 114 (b)〕. 相继地作两个分别以 M 和 N 为中心，系数分别为 $-k_1$和 $-k_2$ 的中心相似和一个关于直线 l 的反射. 这些变换之和把 A 点变到自身，因而 A 是这些变换之和的不动点. 这个和变换显然把每个图形 F 变成反向相似于 F 的图形 F'，根据定理 2，它是一个膨胀反射. 如果我们找出平面中任意一条线段 PQ 在这个变换下的象 $P'Q'$，这个变换的中心 O 和轴就不难找到(见第 57—58 页，特别是图 40). 于是 $A=O$. 在已经作出 A 之后，找所要作的三角形的其余两个顶点 B 和 C 就没有困难了.

若 $k_1k_2=1$，则我们的变换之和是一个滑动反射(或者仅是关于某直线的反射). 在这种情形，本题或无解或解不定. 在所有其它情形本题都有唯一解.

第二章　保距变换和相似变换的进一步应用

49. (a) 可以作很多这样的三角形 $A_1B_1C_1$，使它全等于$\triangle ABC$，并且使得它的边 A_1B_1和A_1C_1 分别过两个给定点 M 和 N. 由定理 1 (第 71 页)，任意一个这样的三角形的边 B_1C_1 必定与某定圆 S 相切，这个圆 S 可以通过作三个这样的三角形 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ 找出来〔图 115 (a)〕. 剩下只需从给定点 P 引 S 的一条切线，所求三角形 $A_0B_0C_0$的边B_0C_0 必落在这条切线上.

本题可以有两个解，一个解或无解.

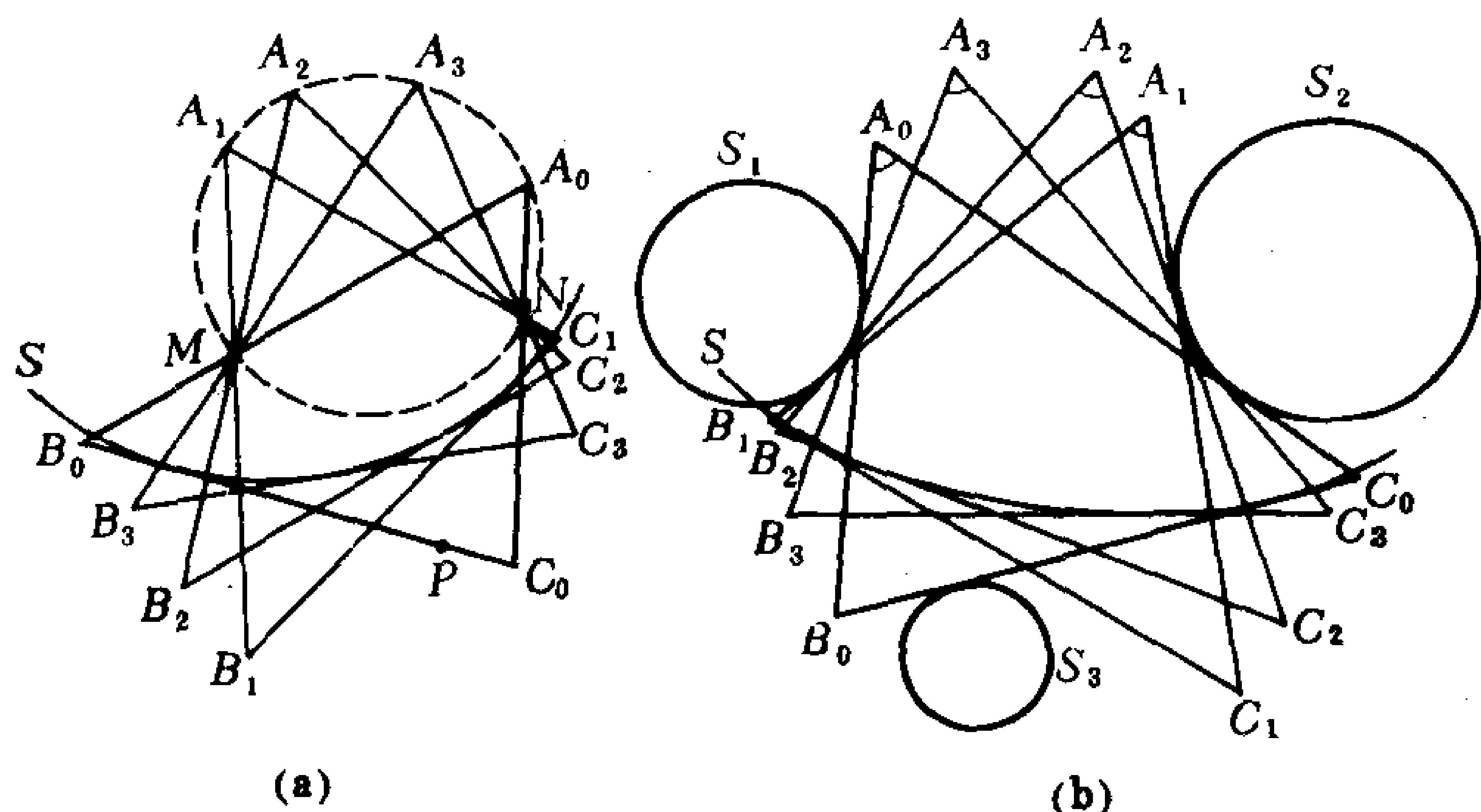


图 115

(b) 本题的解法与(a)非常类似. 可以作很多这样的三角形 $A_1B_1C_1$，使得它全等于给定的三角形 ABC，并且使得它的边 A_1B_1 与给定的圆 S_1 相切，边 A_1C_1 与给定圆 S_2 相切. 所有这些三角形的第三边必与某定圆 S 相切（第 72 页），这个圆 S 容易通过作三个这样的三角形 $A_1B_1C_1$，$A_2B_2C_2$，$A_3B_3C_3$〔图 115(b)〕找出来. 然后只需作圆 S 和给定圆 S_3 的公切线，所求三角形 $A_0B_0C_0$ 的边 B_0C_0 必落在这条公切线上.

一般说来，圆 S 与 S_3 有四条公切线. 此外 $\triangle A_1B_1C_1$（因此还有 $\triangle A_2B_2C_2$和$\triangle A_3B_3C_3$）可按下述四种本质上不同的方式作出：

1° 圆 S_1和点C_1在A_1B_1 的两侧，圆 S_2和点B_1在A_1C_1 的两侧〔图 115(b)〕；

2° S_1和点C_1在A_1B_1 的两侧，S_2和B_1在A_1C_1 的同侧；

3° S_1和点C_1在A_1B_1 的同侧，S_2和B_1在A_1C_1 的两侧；

4° S_1和点C_1在A_1B_1的同侧，S_2和B_1在A_1C_1的同侧. 因此，本题可以有十六个解.

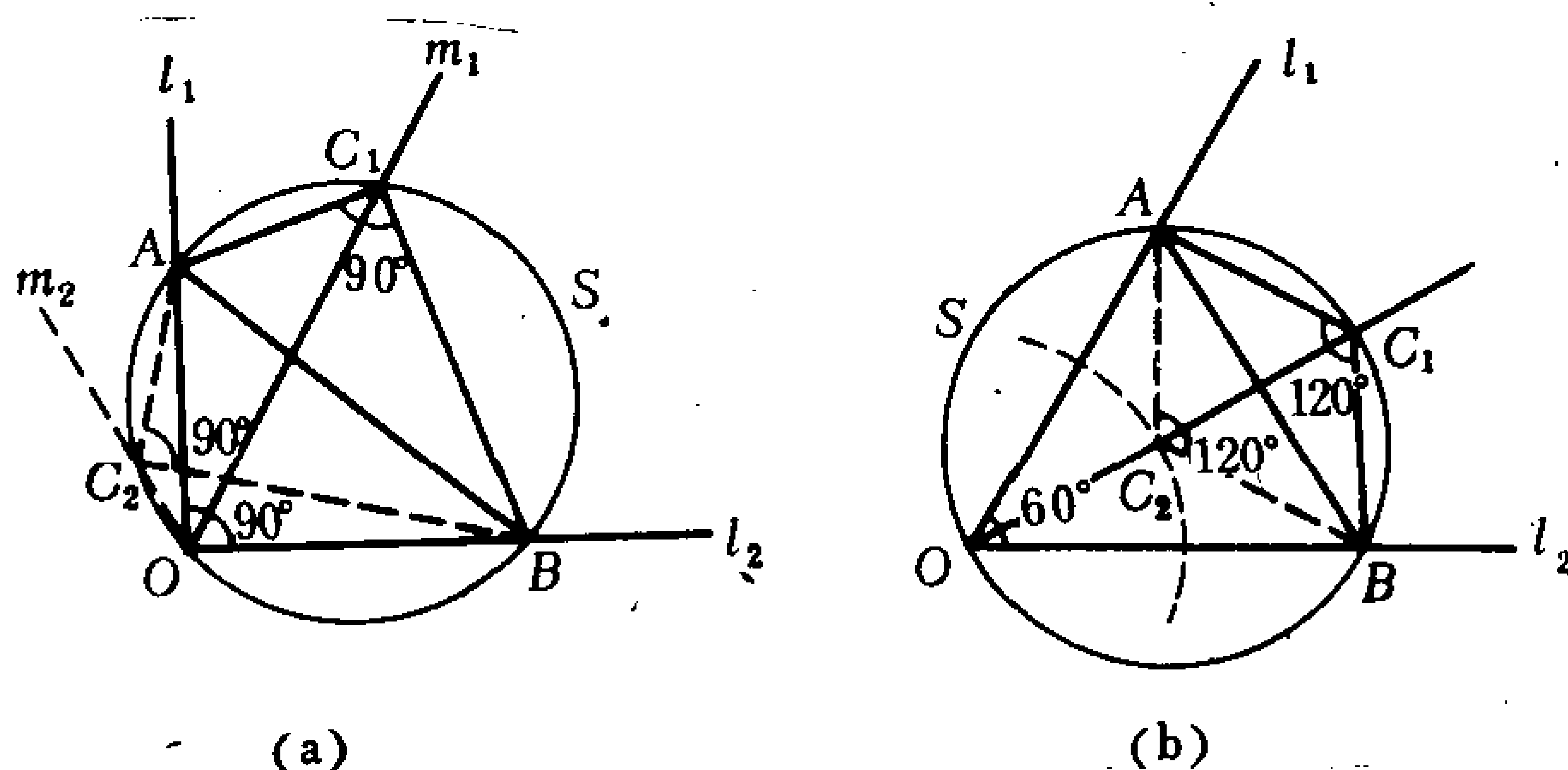


图 116

50. (a) 图 116 (a) 中的点 C_1和C_2 在$\triangle ABO$ 的外接圆 S 上. 由定理 2，当线段 AB 以保持它的端点在角 l_1Ol_2 的两条边上的方式滑动时，$\triangle ABC_1$ 和$\triangle ABC_2$的顶点C_1和C_2 分别描出过 O 的直线m_1和m_2. (更确切地说，它们描出这两条直线上的两个线段. 我们让读者自己去确定这些线段的长度.)

(b) 图 116(b)中的点 C_1 在$\triangle ABO$ 的外接圆 S 上，点 C_2 是这个圆的中心. 当线段 AB 以保持它的端点在角 l_1Ol_2 的两条边上滑动时，$\triangle ABC_1$ 的顶点 C_1 描出一条过 O 的直线，而$\triangle ABC_2$ 的顶点 C_2 描出一个以 O 为中心的圆 (见第 72－73 页). (更确切地说，C_1 描出这条直线上的某个线段，而 C_2 描出这个圆的某一段弧.)

51. 假设$\triangle ABC$ 已经作好. 考虑这样的三角形 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，它的斜边有定长 $\overline{A}\overline{B}=a$，并且这三角形以 l_1与l_2 的交点 O 为相似中心与$\triangle ABC$ 中心相似. 由问题 50 (a) 的解答可知顶点 $\overline{C}$ 在过 O 的某四条容易作出的直线 m_1,m_2,m_3,m_4 之一上 (见图

117).(为了作出这些直线，只须作出有给定锐角 α，并且这个锐角的顶点在直线 l_1或l_2 上的直角三角形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_1$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_2$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_3$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_4$.) 显然，C 与 $\bar{C}$ 在同一直线上，于是 C 可以作为直线 m_1, m_2, m_3, m_4 之一与圆 S 的交点而定出来.

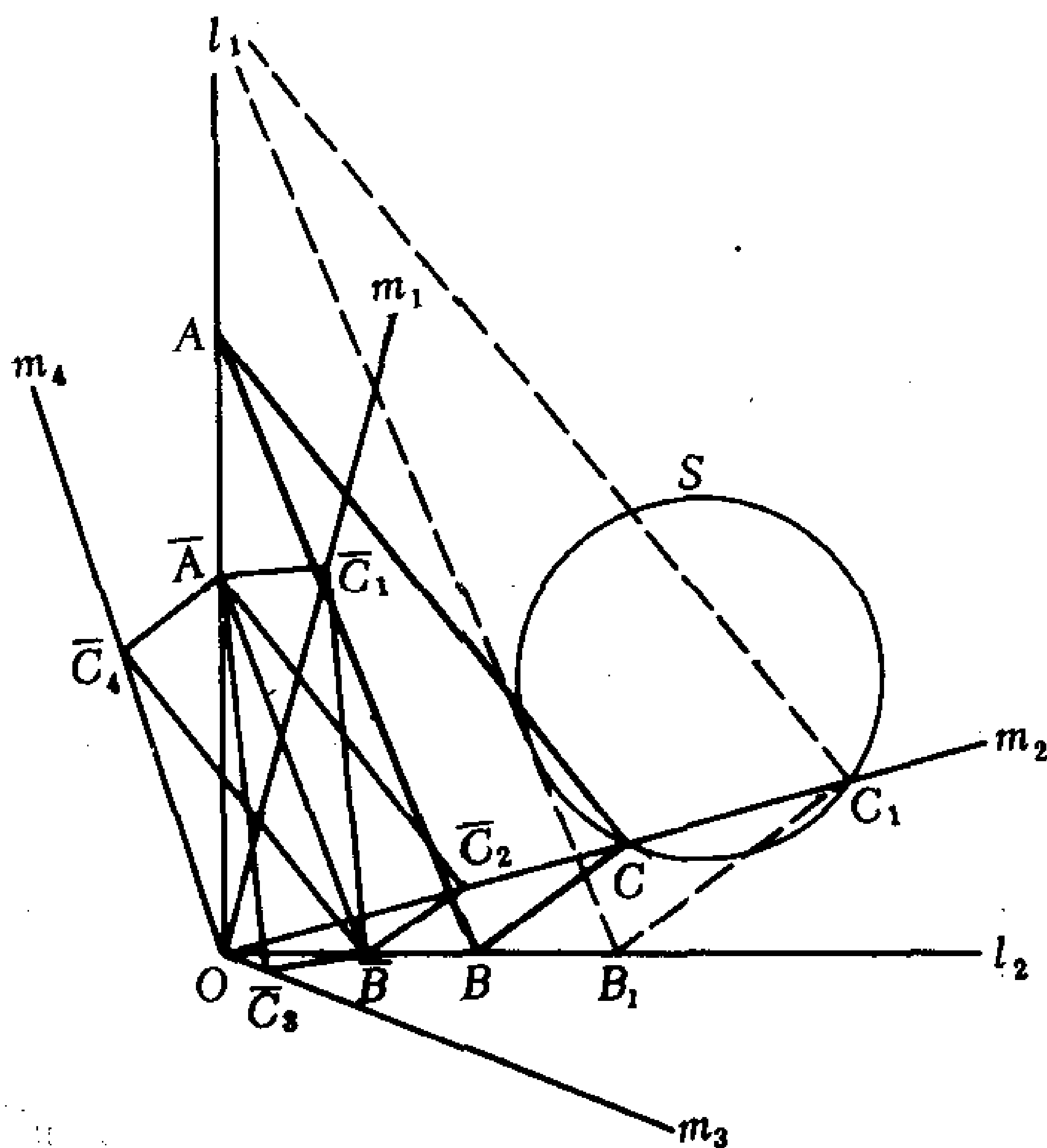


图 117

本题可以多达八个解.

52. (a) 考虑四边形 BM_1M_2P，这里 B 是 S_1和S_2 的第二个交点. 当 M_1M_2 绕 A 旋转时，$\triangle BM_1M_2$ 保持与它自身相似(见问题 31 的解). 所以四边形 BM_1M_2P 也保持与自身相似. 现在本题的全部断言可以由这四边形的点 B 保持不动，顶点 M_1 和 M_2 描出圆 S_1和S_2 以及边 M_1M_2 总过定点 A 等事实得出(见第 76 页). (我们假设 $\triangle M_1M_2P$ 总是作在 M_1M_2 的固定的一侧，即总与 $\triangle BM_1M_2$在M_1M_2 的同一侧或相反的一侧；否则我们必须允许 P 描出两个圆，并且必须对本题中关于直线 M_1P和M_2P 的陈述作相应的改变.)

(b) 由 $\triangle BM_1M_2 \sim \triangle BN_1N_2$ 〔见 (a) 的解〕可知，$\triangle BM_1N_1 \sim \triangle BM_2N_2$. 因而 $\angle BN_1M_1 = \angle BN_2M_2$，所以四边

形 BN_1QN_2 可以有外接圆. 而这就是说点 Q 的轨迹是外接于 $\triangle BN_1N_2$ 的圆 Γ(图 118).

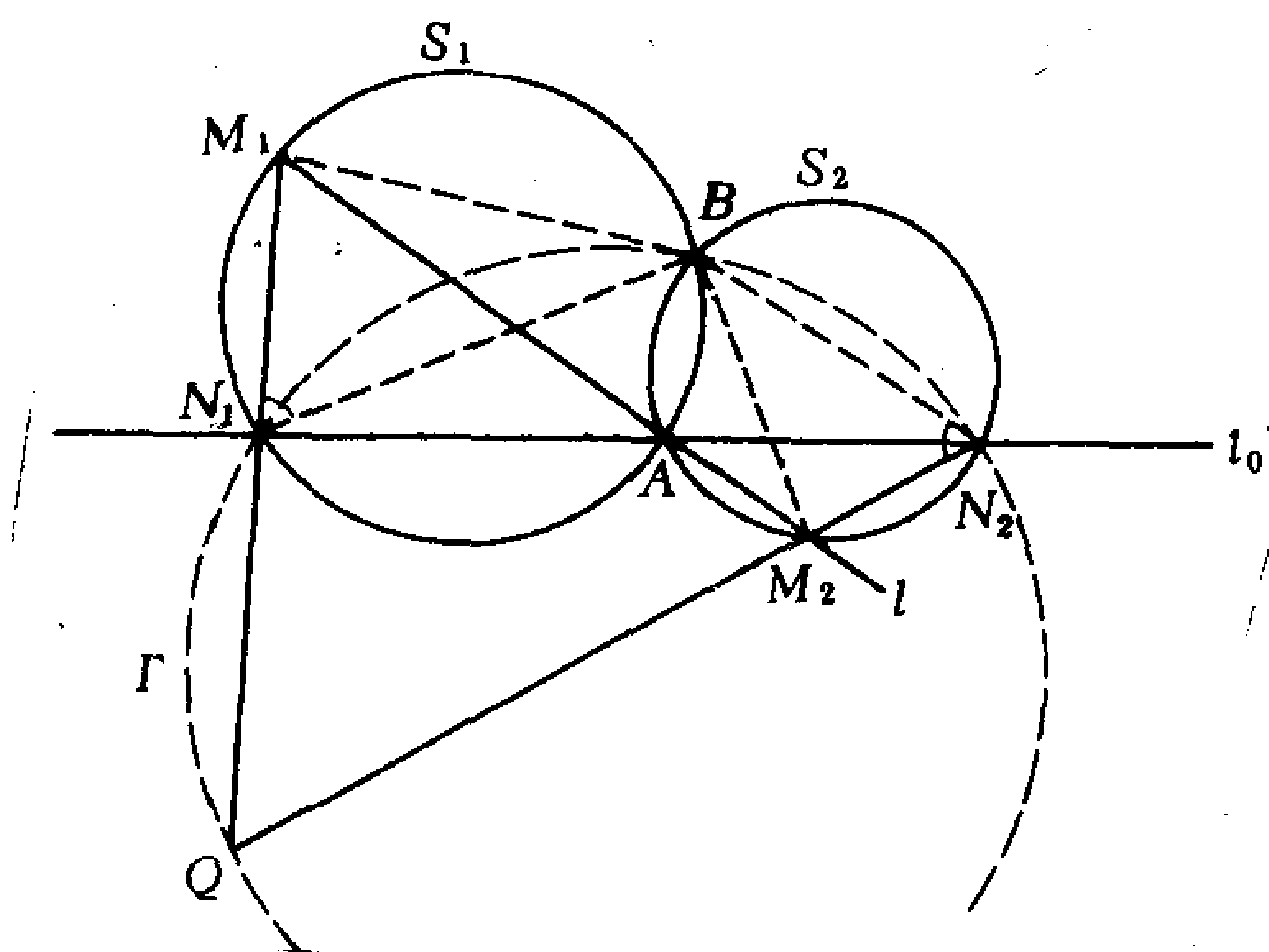


图 118

当 l_0 绕 A 转动时, $\triangle BN_1N_2$ 改变, 但总保持与它的初始位置相似〔见问题(a)的解〕. 因为同时又有点 B 保持不动, 并且点 N_1和N_2 分别描出圆 S_1和S_2, 因此这个三角形的外接圆 Γ 的中心描出一个圆.

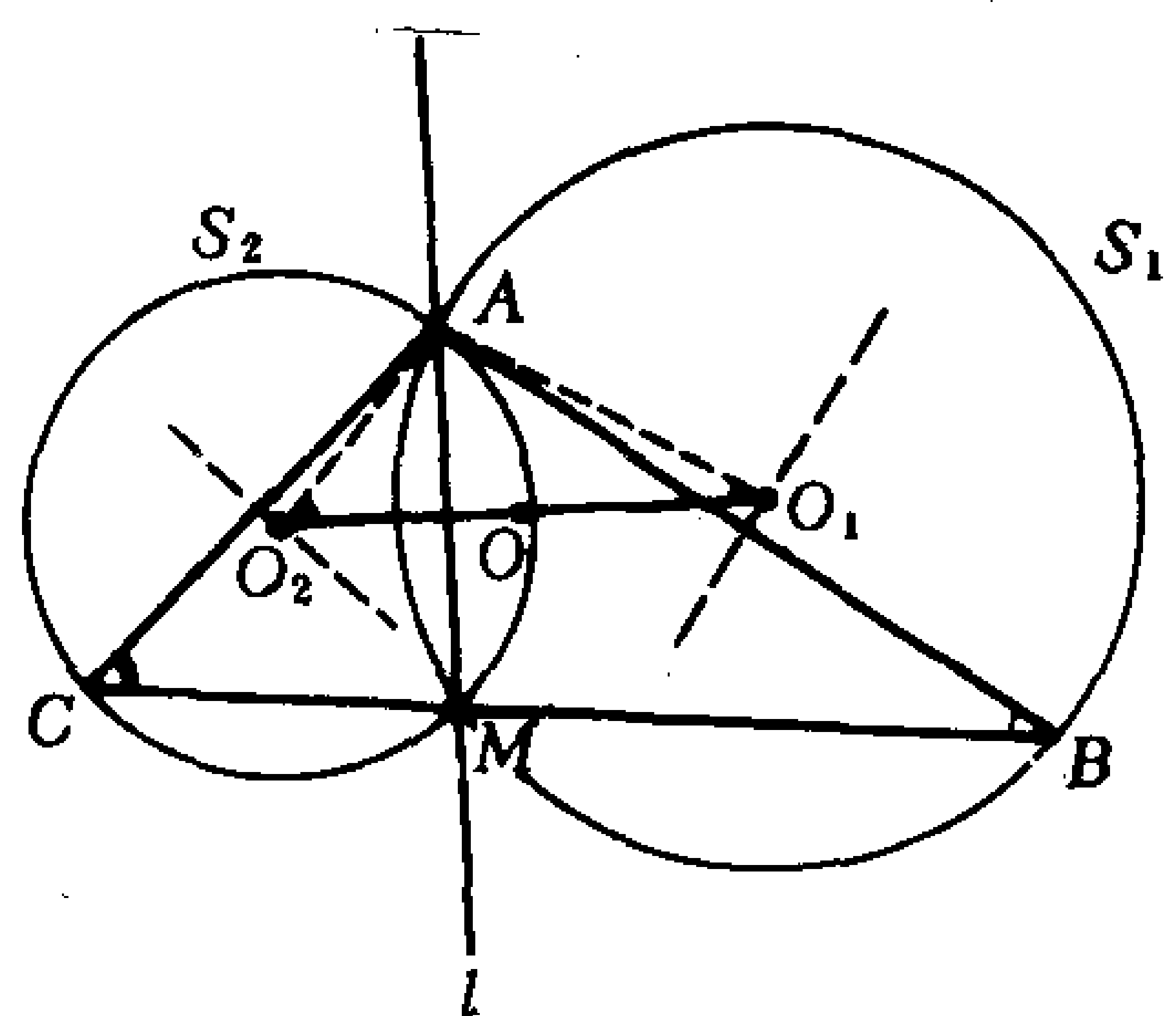


图 119

53. 显然 $\angle ABM = \angle AO_1O_2$ (它们中的每一个都等于圆 S_1 的弧 AM 的度数的一半, 见图 119). 类似地, $\angle ACM = \angle AO_2O_1$. 所以当 l 绕 A 转动时, $\triangle AO_1O_2$ 以这样的方式改变: 它总保持与自身相似 (并且都与 $\triangle ABC$ 相似). 因为点 A 是不动的, 并且点 O_1和O_2 都描出直线 (AB 和 AC 的中垂线) 由此即知线段 O_1O_2 的中点也描出一条直线.

54. 设 $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$和$\triangle\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ 是 $\triangle ABC$ 的任意两个位置 (图 120). 因为 $O\bar{A}$ 和 $O\bar{B}$($O\bar{A}'$ 和 $O\bar{B}'$) 的夹角等于 $\bar{A}C$与$\bar{B}C$ 的夹

角，由此可知

$$\angle\bar{A}O\bar{B}+\angle\bar{A}C\bar{B}$$
$$=\angle\bar{A}'O\bar{B}'+\angle\bar{A}'C\bar{B}'$$
$$=180^\circ,$$
$$\angle O\bar{A}C+\angle O\bar{B}C$$
$$=\angle O\bar{A}'C+\angle O\bar{B}'C$$
$$=180^\circ,$$

以及
$$\angle O\bar{A}'\bar{A}=\angle O\bar{B}'\bar{B},$$
$$\angle O\bar{A}\bar{A}'=\angle O\bar{B}\bar{B}'.$$

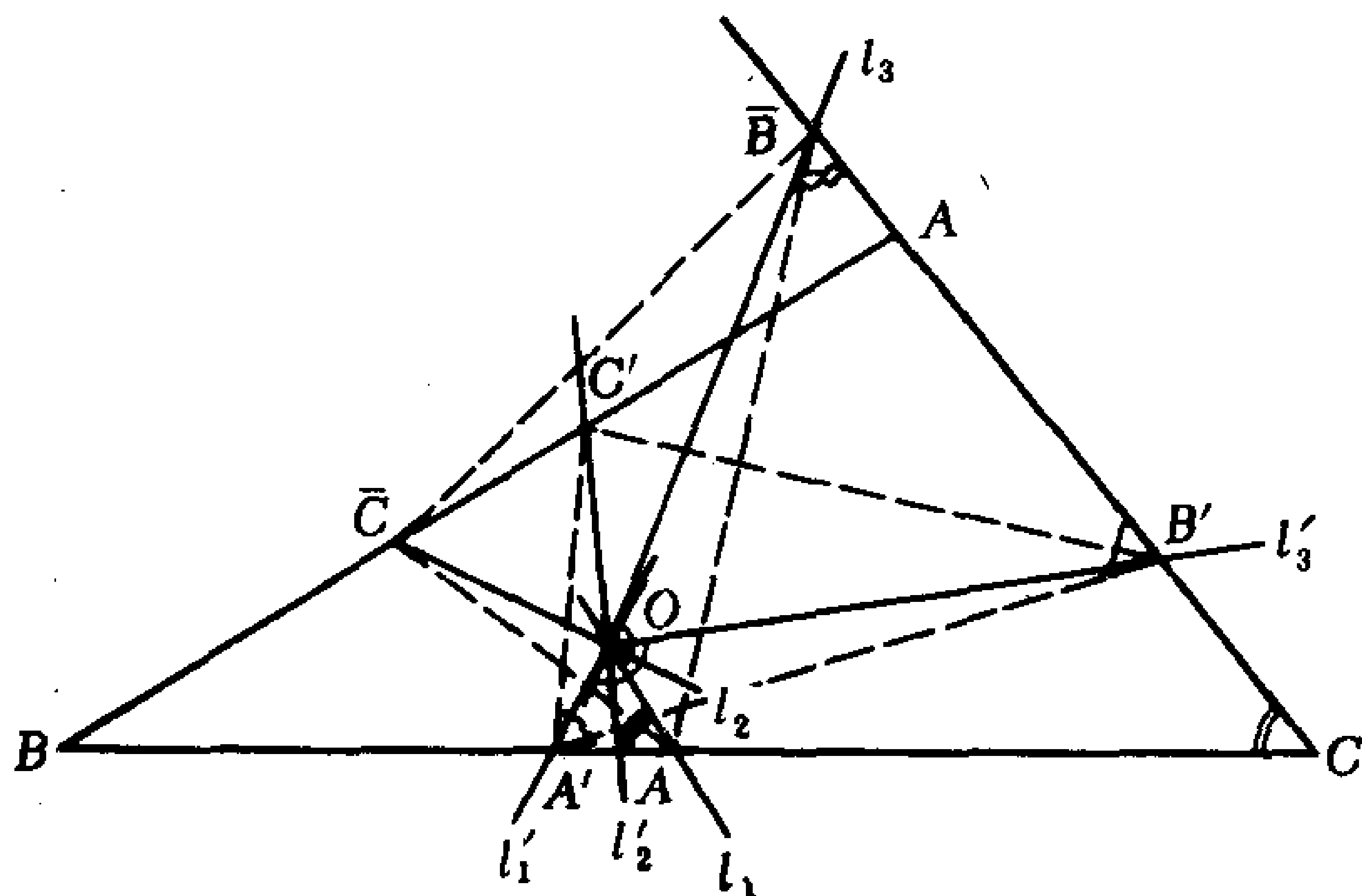


图 120

于是 $\triangle O\bar{A}\bar{A}'$ 与 $\triangle O\bar{B}\bar{B}'$ 相似. 同理可证 $\triangle O\bar{C}\bar{C}'$ 也与它们相似. 由此可见 $\triangle\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ 可由 $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 经过一个以 O 为中心的螺旋相似得到. 这样，当直线 l_1,l_2,l_3 绕 O 旋转时，$\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 改变但仍保持与它自身相似，并且它的每两个位置都有同样的旋转中心 O. 由上述事实以及 $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的顶点都描出直线可知，这个三角形的每个点都描出一条直线，这就回答了 (b) 中

的问题. 因为对于所有的三角形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ，点 O 有相同的位置，所以为了弄清楚点 O 在这些三角形中的位置，只要考虑这些三角形中的某一个，例如，以 O 到$\triangle ABC$ 各边的垂线的垂足为顶点的三角形 $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$.

1° 若 O 是$\triangle ABC$ 外接圆的中心，则 $\triangle\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$ 的边平行于$\triangle ABC$ 的边（因为 $\triangle\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$ 的边是$\triangle ABC$ 的中位线），因而 O 是 $\triangle\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$ 的高的交点.

2° 若 O 是$\triangle ABC$ 的内切圆心，则 $O\bar{A}_0 = O\bar{B}_0 = O\bar{C}_0$ ，因而 O 是 $\triangle\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$ 的外接圆圆心.

3° 若 O 是$\triangle ABC$ 的高的交点，则 O 是 $\triangle\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0$ 的角平分线的交点（因为 $\angle O\bar{A}_0\bar{B}_0$与$\angle OC\bar{B}_0$ 在四边形 $O\bar{A}_0C\bar{B}_0$ 的外接圆上对同一个弧，所以 $\angle O\bar{A}_0\bar{B}_0 = \angle OC\bar{B}_0$. 同理 $\angle O\bar{A}_0\bar{C}_0 = \angle OB\bar{C}_0$. 又由 $\triangle AC\bar{C}_0$与$\triangle AB\bar{B}_0$ 相似，有 $\angle OC\bar{B}_0 = \angle OB\bar{C}_0$).

55. (a) 设 l_1, l_2, l_3, l_4 是四条给定的直线. 考虑与给定四边形相似并且三个顶点 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 分别在直线 l_1, l_2, l_3 上的所有四边形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. 给定这样的四边形的顶点 $\bar{A}$或边$\bar{A}\bar{B}$ 的方向，我们可以把它作出来〔见 § 2 中问题 30 (a) 和 § 1 中问题 9 (b)〕. 由定理 3（第 79 页）可知，所有这样的四边形的顶点 $\bar{D}$ 落在某直线 l 上，通过找出 $\bar{D}$ 的两个位置，直线 l 容易作出. l 与 l_4 的交点就是所求四边形 $ABCD$ 的顶点 D. 剩下的部分可利用问题 30(a)的解答中指出的作法来完成.

一般说来本题有唯一解；例外情形是 $l \parallel l_4$（本题无解）或 $l = l_4$（解不定）.

(b) 命 M_1, M_2, M_3, M_4 是四个给定点. 考虑所有这样的四边形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ ，它相似于给定的四边形，并且边 $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{C}\bar{D}$ 分别过点 M_1, M_2, M_3. 因为这些四边形的顶点 $\bar{B}$和$\bar{C}$ 分别位于

张在线段 M_1M_2和M_2M_3，并且所含圆周角为已知角的两个弧上，我们可以作很多这样的四边形. 由定理 4(第 79 页)，每个这样的四边形的边 $\bar{D}\bar{A}$ 都过某定点 M. 通过作出两个这样的四边形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 容易找到点 M. 直线 MM_4 包含所求四边形的边 DA. 若 M 与 M_4 重合，则解不定.

(c) 考虑这样的四边形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$，它与给定四边形相似，并且边 $\bar{B}\bar{C}$,$\bar{C}\bar{D}$,$\bar{B}\bar{D}$ 分别过给定点 M, N, P. 根据定理 4，每个这样的四边形 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 的顶点 $\bar{A}$ 在某个圆 $\bar{S}$ 上（这个圆不难作出；为此只须找出 $\bar{A}$ 的三个位置）. $\bar{S}$ 与给定的圆 S 的任意一个交点都可以作为所求四边形的顶点 A〔参看(b)的解〕. 本题可以有两个解，一个解或无解；若 $\bar{S}$ 与 S 重合，则解不定.

56. 考虑所有这样的直线 $\bar{l}$，它使得 l_1,l_2,l_3在$\bar{l}$ 上截得的线段 $\bar{A}\bar{B}$和$\bar{B}\bar{C}$ 之比有给定的值. 选取直线 l_1 上任一点，我们可以作出 $\bar{l}$ (见 § 1 中问题 1). 直线 $\bar{l}$ 上使得线段 $\bar{A}\bar{B}$,$\bar{B}\bar{C}$,$\bar{C}\bar{D}$ 有给定比的点 $\bar{D}$ 落在一直线 m 上（见定理 3)，通过找出 $\bar{D}$ 的两个位置，直线 m 容易作出来. m 与 l_4 的交点在所求的直线 l 上. 剩下的部分只须用题 1 的解答中所指出的作法来完成. 若 $m \parallel l_4$，则本题无解；若 m 与 l_4 重合，则解不定〔参看问题 55(a)的解〕.

57. 当角 α 改变时，$\triangle A'B'C'$ 改变但仍然保持与自身(因而也与$\triangle ABC$) 相似. 它的边总过某些固定点，即$\triangle ABC$ 各边的中点. 所以$\triangle A'B'C'$ 的每个点(特别是它的高的交点，它的角平分线的交点和它的中线的交点)描出一个圆. 题中的第二个断言可以由$\triangle A'B'C'$ 的所有位置(包括$\triangle ABC$，它对应于值 $\alpha=0$)的旋转中心 O 与$\triangle ABC$ 外接圆中心重合这一事实得出. 为了弄清这一点，只需注意当 $\alpha=90°$时，我们所考虑的那些

直线都过同一点 O.

58. (a) 若$\triangle KLM$ 以这样的方式变化：保持与它自身相似，并使它的顶点 K,L,M 分别在$\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上滑动. 则$\triangle KLM$ 的所有位置有一公共旋转中心 O，它落在圆 S_1,S_2,S_3 上〔见定理 3 的证明，特别是图 54 (a)〕. 所以这三个圆过同一点 O(图 121).

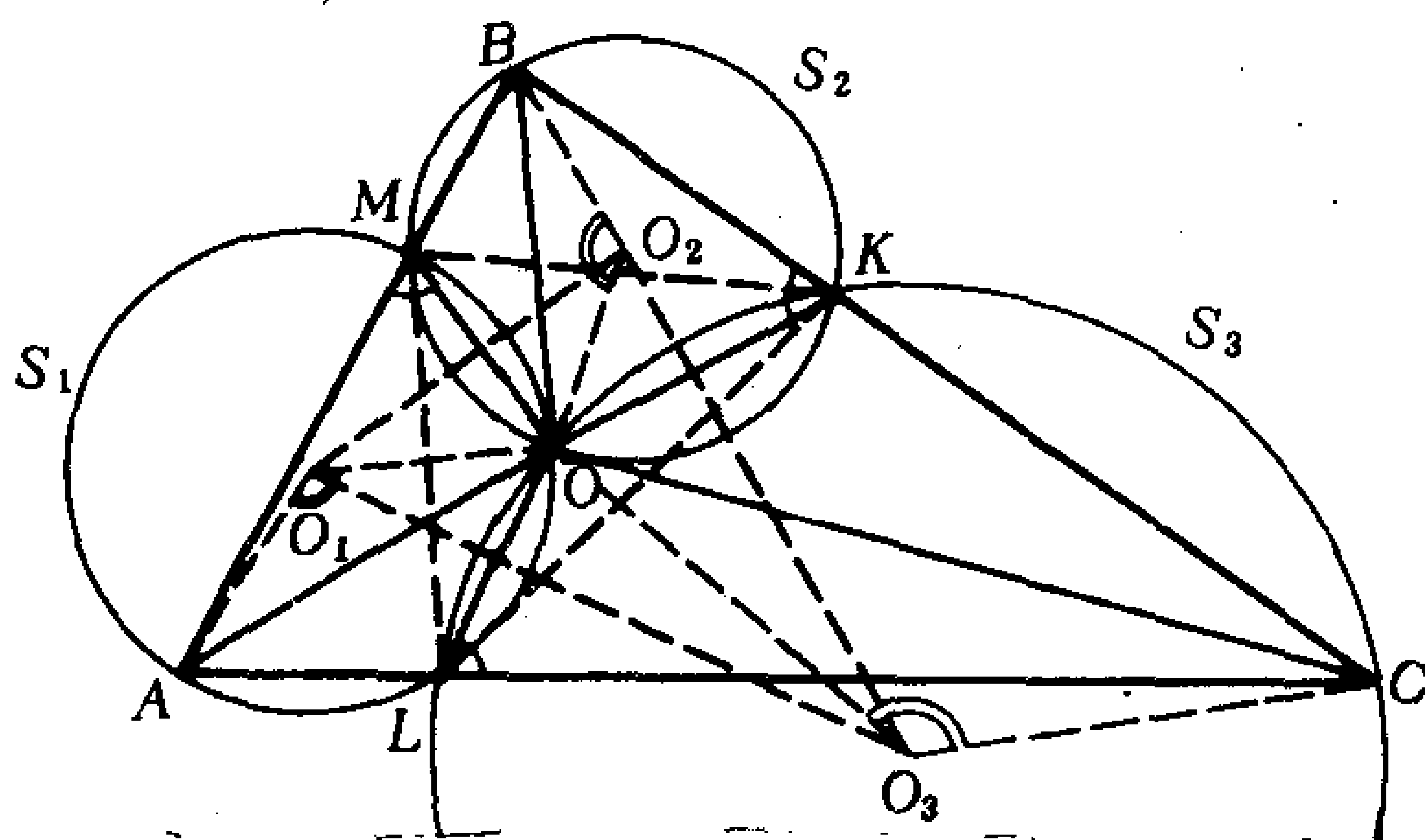


图 121

(b) 命 O_1,O_2,O_3 分别是圆 S_1,S_2,S_3 的中心，并命 O 是这些圆的公共点(图 121). 由于四边形 $ALOM$ 内接于圆，我们有 $\angle AMO+\angle ALO=180°$，因而有 $\angle AMO=\angle CLO$. 类似地，$\angle CLO=\angle BKO$. 但是从等式$\angle AMO=\angle BKO=\angle CLO$ 可得，$\angle AO_1O=\angle BO_2O=\angle CO_3O$. 所以 $\triangle OO_1A$，$\triangle OO_2B$，$\triangle OO_3C$ 全都彼此相似，从而 $\triangle O_1O_2O_3$ 可以由$\triangle ABC$ 经过中心为 O，转角为 $\angle O_1OA$，相似系数为 OO_1/OA 的螺旋相似得到.

59. (a) $\triangle A_1B_1C_1$ 是由$\triangle ABC$ 经过绕 O 点旋转某 α 角得到的. 由此可知 $\angle A\bar{B}A_1=\angle A\bar{C}A_1=\angle AOA_1=\alpha$，即点 A，$A_1,\bar{B},\bar{C}$，O 位于一个圆上 (图 122). 同理可证五个点 B，$B_1,\bar{A},\bar{C}$，O 在一个圆上，并且五个点 C，$C_1,\bar{A},\bar{B}$，O 也在一个圆上.

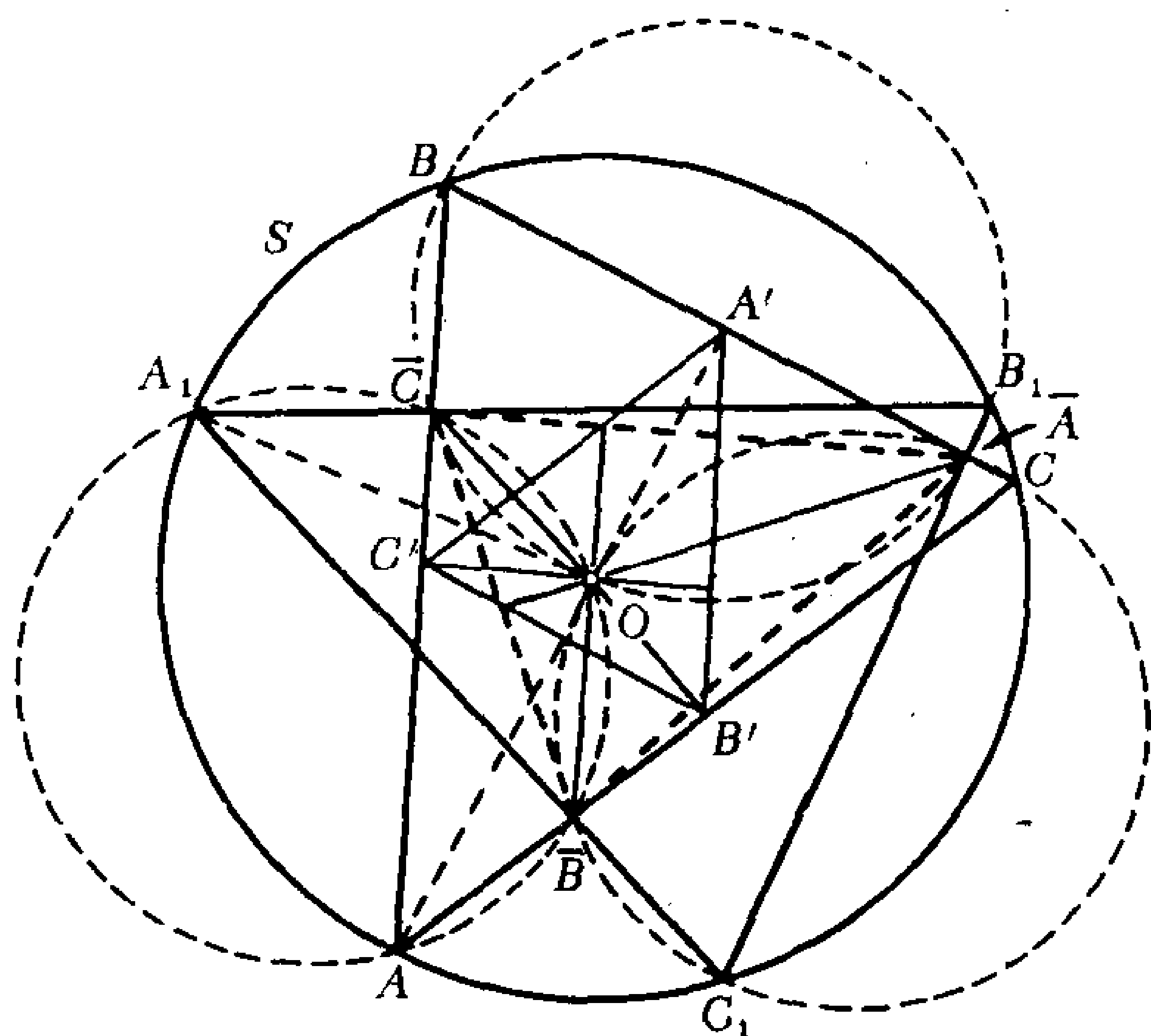


图 122

考虑由$\triangle ABC$各边的中点联线构成的$\triangle A'B'C'$. 我们变动这三角形，使它的顶点在$\triangle ABC$的边上滑动，并使得它总保持相似于初始位置（即相似于$\triangle ABC$）. 这个三角形的所有位置有一个公共的旋转中心——$\triangle AB'C'$，$\triangle BA'C'$，$\triangle CA'B'$的外接圆的交点〔见问题 58(a)的解〕，即点O. 现在假设变动的三角形的一个顶点是$\bar{A}$，命$\bar{B}'$和$\bar{C}'$是它的另外两个顶点. 则$\bar{B}'$，C，$\bar{A}$，O落在同一个圆上（见定理 3 的证明）. 由此可知$\bar{B}'=\bar{B}$. 同理可证顶点$\bar{C}'=\bar{C}$.

(b) 点O是变动的三角形$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$的不动点，对于这三角形的所有位置，点O必定对应于自身. 因为O是$\triangle A'B'C'$的高的交点，可知O也是$\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$的高的交点.

60. (a) l_2是由l_1经过关于$\triangle ABC$的两条边的两个反射之和得到的，所以l_1与l_2的夹角等于三角形ABC的这两条边

夹角的两倍（见第一册中第 43 页）. 这样，三角形 T 的各个角由$\triangle ABC$ 的角所决定而与 l 的位置无关.（若$\triangle ABC$ 是直角三角形，则三条直线 l_1,l_2,l_3 中的两条将是平行的，所以 l_1,l_2,l_3 不构成三角形.）

（b） 假设直线 l 绕平面中某点 M 转动. 于是三角形 T 的边总是分别过 M 关于$\triangle ABC$ 的三条边的对称点 M_1,M_2,M_3. 换句话说，三角形 T 以这样的方式变动：它总保持与它自身相似，并且它的边总过三个定点. 在定理 4 的证明中已经证得，在这种情形下三角形 T 的每两个位置的旋转中心 O 都相同. 于是，l_1 过 O 点（亦即 l 过点 O 关于边 AB 的对称点 O'），当且仅当三角形 T 退化成一点（在这种情形下，直线 l_2和l_3 也过 O 点）.

这样一来，我们看到，在一般情形下，经过给定点 M 的直线之中仅有一条直线 l，使得 l_1,l_2,l_3 交于一点. 若有两条这样的直线，则意味着所有过 M 的直线都有这一性质. 现在命 M 和 N 是两个点，并命 l 和 $\bar{l}$ 分别是过它们的直线，使得对应的两组直线 l_1,l_2,l_3和$\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3$ 分别都交于一点. 若 H 是 l 与 $\bar{l}$ 的交点，则对每条过 H 的直线，它所对应的直线 l_1,l_2,l_3 交于一点（直线 l 与 $\bar{l}$ 不能是平行的，因为若 l_1,l_2,l_3 交于一点 O，并且 $l/\!/\bar{l}$，则直线 $\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3$ 将平行于对应直线 l_1,l_2,l_3，并且它们与 O 的距离等于 l 与 $\bar{l}$ 的距离，所以它们不能交于一点）. 若 l 过 H，则 l_1和l_2 分别过 H 关于$\triangle ABC$ 的两条边的对称点 H_1和H_2. 又因为 l_1与l_2 的夹角是一定值〔见（a）的解〕，所以 l_1与l_2 的交点 P 描出一个圆 S（它以线段 H_1H_2 为弦，并且所含圆周角等于已知角）.

这样，我们证明了存在一点 H，它使得每条过 H 的直线

所对应的直线 l_1,l_2,l_3 交于一点. 不可能有两个这样的点 G 和 H，否则过每个点 M 就有两条直线 MG 和 MH，使得其中的每一条所对应的三条直线 l_1,l_2,l_3 都交于一点. 为了看出 H 是$\triangle ABC$ 的高的交点和 S 是这三角形的外接圆，只需注意对应于$\triangle ABC$ 的高的直线 l_1,l_2,l_3 相交于$\triangle ABC$ 的顶点.

(c) 设 l 是任意一条直线，$\bar{l}$ 是与它平行且过 H 的直线. 直线 $\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3$ 交于一点 P. 如 (b) 的解答中所指出的，直线 l_1,l_2,l_3 与 P 点的距离等于 $\bar{l}$ 与 l 的距离，亦即 H 到 l 的距离. 这样，三角形 T 的内切圆半径等于 H 到 l 的距离. 因为所有三角形 T 彼此相似，由此即知 T 的面积仅依赖于 H 到 l 的距离.

61. 第一种解法. 若从 P 到$\triangle ABC$ 各边所作垂线的垂足在一直线 l 上，则由 $\bar{l}$ 关于$\triangle ABC$ 的边作反射得到的直线 $\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3$ 交于点 P，这里 $\bar{l}$ 是以 P 为相似中心，2 为相似系数，中心相似于 l 的直线(图 123). 由此即知 P 必落在$\triangle ABC$ 的外接圆上〔并且 $\bar{l}$ 必过$\triangle ABC$ 高的交点 H，见问题 60(b)〕.

第二种解法. 分别用 N，L，M 表示 P 向$\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 所作垂线的垂足 (图 124). 我们证明 P 是所有这样一些三角形 $L'M'N'$ 的旋转中心，这些三角形相似于$\triangle LMN$，并且它们的顶点分别在$\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上. 事实上，由 $\angle PMA=\angle PNA=90°$ 可知点 A，M，N，P 在一圆上，即 P 在圆 AMN 上. 同理可证 P 在圆 BNL 和圆 CLM 上. 但是这些圆的交点也就是所求的旋转中心〔参看问题 58(a)的解〕.

进一步，如在图 124 中所表示的情形，因为$\angle APN$ 和$\angle AMN$ 是同弧所对的圆周角，$\angle NPB$ 和$\angle NLB$ 也是同弧所对的圆周角，所以

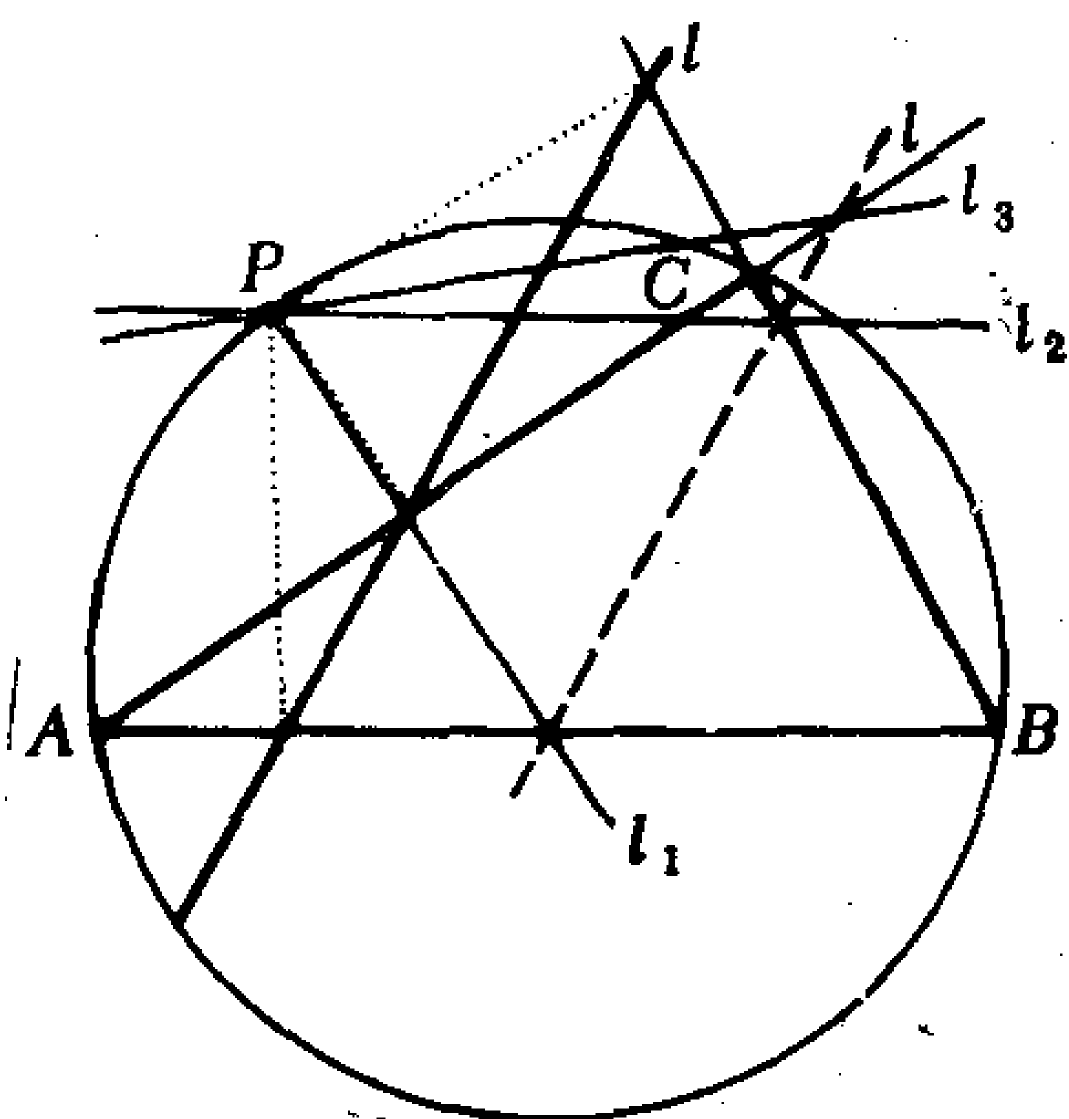


图 123

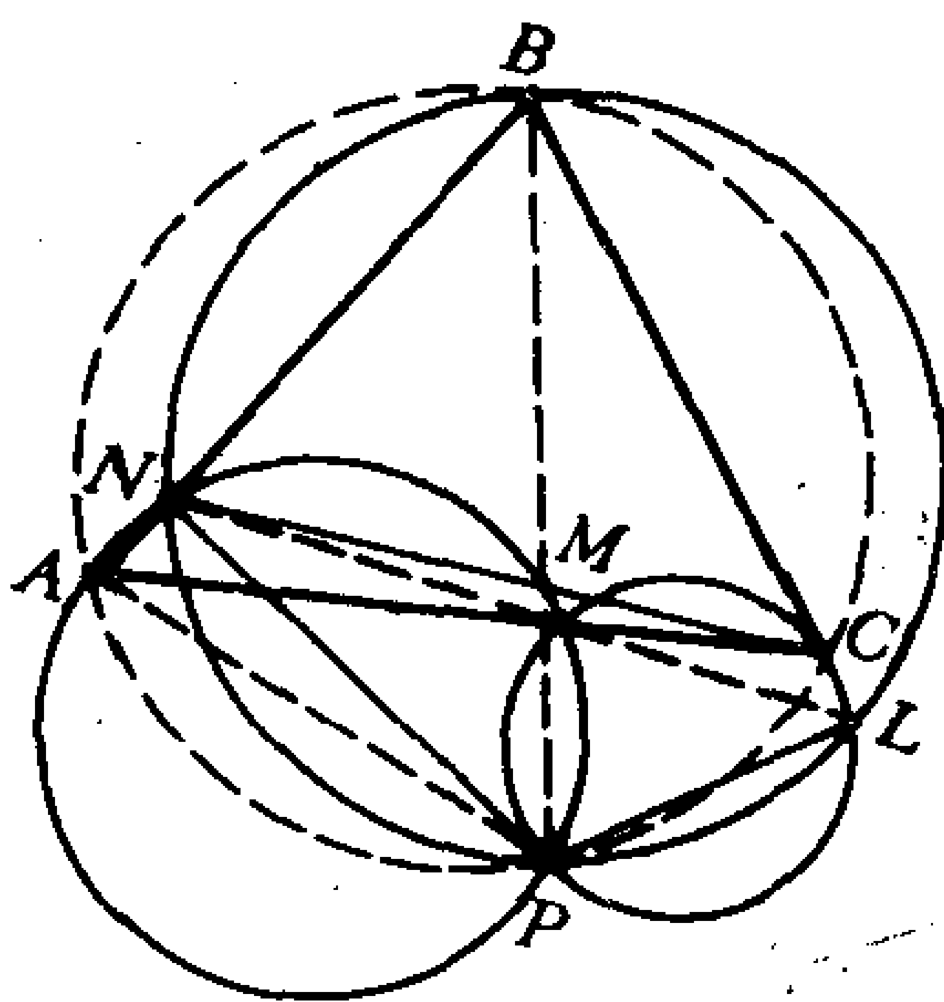


图 124

$$\angle APB=\angle APN+\angle NPB=\angle AMN+\angle NLB.$$

但是

$$\angle AMN=\angle MCN+\angle MNC,$$
$$\angle NLB=\angle NCB-\angle LNC,$$

所以有

$$\begin{aligned}&\angle AMN+\angle NLB\\&=(\angle MCN+\angle NCB)+(\angle MNC-\angle LNC)\\&=\angle MCB+\angle MNL.\end{aligned}$$

比较这个等式与前面的等式，我们得到

$$\angle APB=\angle MCB+\angle MNL.$$

利用这个等式我们可以证明题中的断语. 事实上，若 P 点在$\triangle ABC$ 的外接圆上，则$\angle APB=\angle ACB$，并且$\angle MNL=0°$，即点 M，N，L 在一直线上（图 124）. 反之，若点 M，N，L 在一直线上，则$\angle MNL=0°$，并且$\angle APB=\angle ACB$，因此点 P 在过 A，B，C 的圆上.

62.（a） 设 l_1，l_2，l_3，l_4 是给定的四条直线. 作分别由直线

l_1，l_2，l_3 和 l_1,l_2,l_4 构成的两个三角形的外接圆. 用 P 表示这两个圆的（与直线 l_1和l_2 的交点不同的）交点（图 125）. 从 P 作直线 l_1，l_2，l_3，l_4 的垂线. 命 M_1，M_2，M_3，M_4 是这些垂线的垂足，由问题 61 的结果，点 M_1，M_2，M_3 在一直线上，点 M_1，M_2，M_4 也在一直线上. 因而这四个点落在一直线上. 再由问题 61 可知，仅当 P 在由 l_1,l_3,l_4 构成的三角形的外接圆上时，M_1,M_3,M_4 能在一直线上. 同理可证，P 在由 l_2,l_3,l_4 构成的三角形的外接圆上.

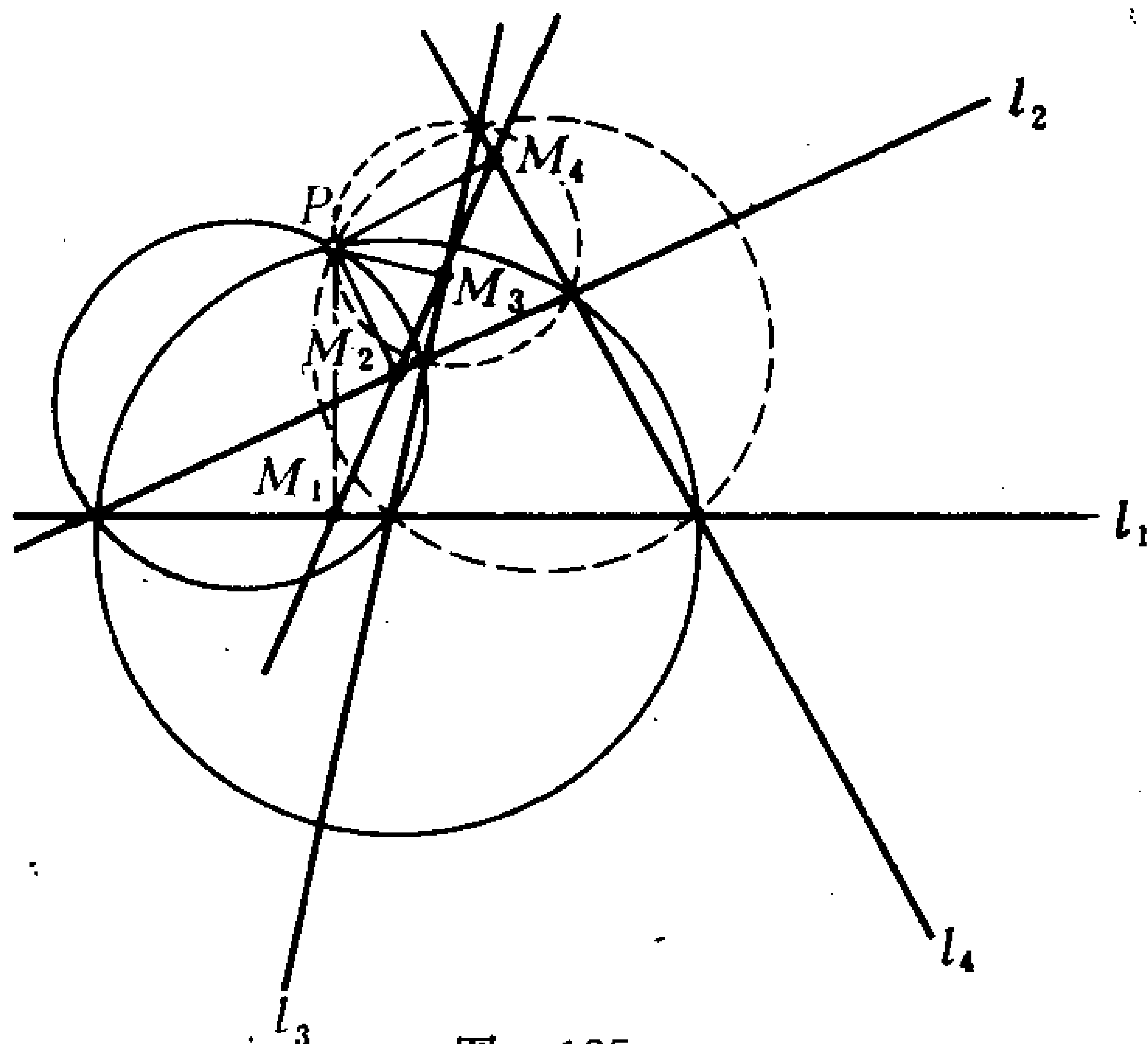


图 125

(b) 用图 58 中的记号，$MP\perp AB$（因为$\angle MPA$ 与$\angle MPB$ 所对的弧是半圆）. 同理有 $MQ\perp AC$ 和 $MR\perp BC$，因而 P，Q，R 是从$\triangle ABC$ 外接圆 S 上的点 M 向这三角形的各边所作垂线的垂足.

(c) 设 $ABCD$ 是内接于圆的四边形，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$AC=e$，$BD=f$（图 126）. 从 D 分别向三角形 ABC 的边 AB，BC，CA 作垂线 DR，DS，DT. 由前一问题的结果，这些垂线的垂足 R，S，T 共线. 显然，四边形 $ATDR$ 有外接圆，线段 AD 是这个圆的直径. 由此可得

$$TR = AD\sin\angle TDR = d\sin\angle TDR.$$

但是$\angle TDR=\angle BAC$（这两个角的边相互垂直），考虑三角形

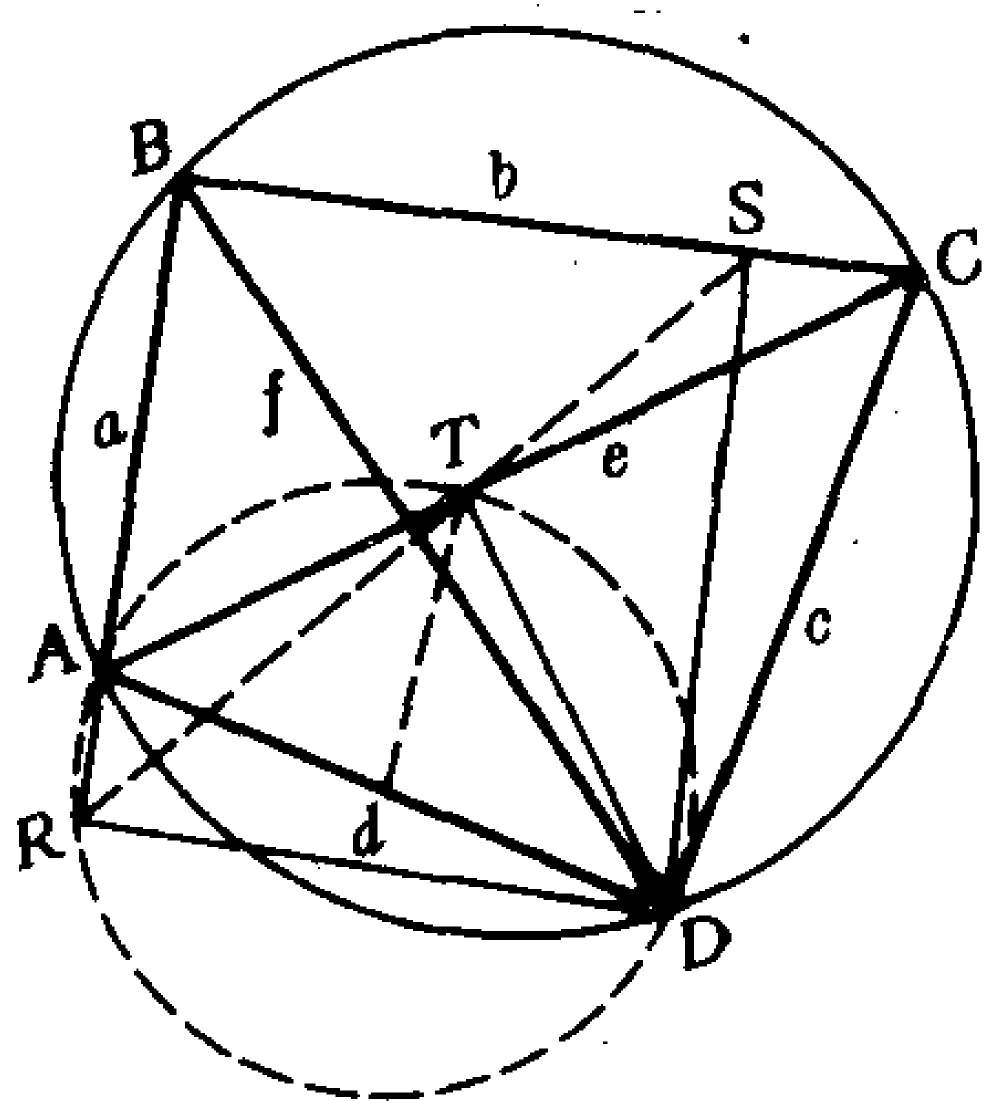


图 126

ABC知，$\sin\angle BAC=BC/2r=b/2r$，其中 r 是四边形 $ABCD$ 外接圆的半径. 于是我们得到

$$TR=d\frac{b}{2r}=\frac{bd}{2r}.$$

用完全类似的方法，我们得到关系式

$$TS=\frac{ac}{2r},\qquad RS=\frac{ef}{2r}.$$

又由于点 R,S,T 在一直线上（见图 126），我们有

$$RT+TS=RS,$$

也就是有

$$\frac{bd}{2r}+\frac{ac}{2r}=\frac{ef}{2r}.$$

用 $2r$ 乘这个等式两边，得到

$$bd+ac=ef,$$

这就是所要证的.

63. 由给定的四条直线构成的四个三角形的外接圆交于一点 P〔问题 35，62(a)〕. 从 P 向直线 l_1,l_2,l_3,l_4 所作垂线的垂足在一直线 m 上（参看问题 61）. 所考虑的四个三角形的高的交点 H_1，H_2，H_3，H_4，以 P 为相似中心，2 为相似系数，分别中心相似于直线 PH_1,PH_2,PH_3,PH_4 和直线 m 的交点（见问题 61 的第一种解法）. 因此它们也在一直线上，这直线平行于 m，并且经过点 P 关于 m 的对称点 P'.

64. 用 A 和 B 表示圆 S_1 和 S_2 的交点；用 P 和 Q 分别表示直线 MB 与圆 S_1 和 S_2 的交点（图 127）. 因为从点 M 到两个给

定圆的切线长度之比 m/n 已给定，我们也可以把比

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MP}{MQ}\cdot\frac{MB}{MB}=\frac{m^2}{n^2}$$

认为是已知的．从这个等式我们看出，若 $m=n$，则点 P 和 Q 重合，因而 M 在直线 AB 上．所以下面我们将假设 $m\neq n$．

现在考虑 $\triangle AQP$．当 M 移动时，它要改变，但是 $\angle APQ$ 保持不变，因为它总是对着圆 S_1 上的定弧．$\angle AQP=180°-\angle AQB$ 也保持不变，这是因为 $\angle AQB$ 总对着圆 S_2 上的定弧，因此三角形 AQP 总保持与自身相似．三角形的顶点 A 不动，而 P 描出圆 S_1，因此点 M（在三角形的边 QP 上，并且使得 $MP/MQ=m^2/n^2$）也描出一个圆 S，S 可由 S_1 经过以 A 为中心，转角为 $\angle PAM$，相似系数为 AM/AP 的螺旋相似得到．

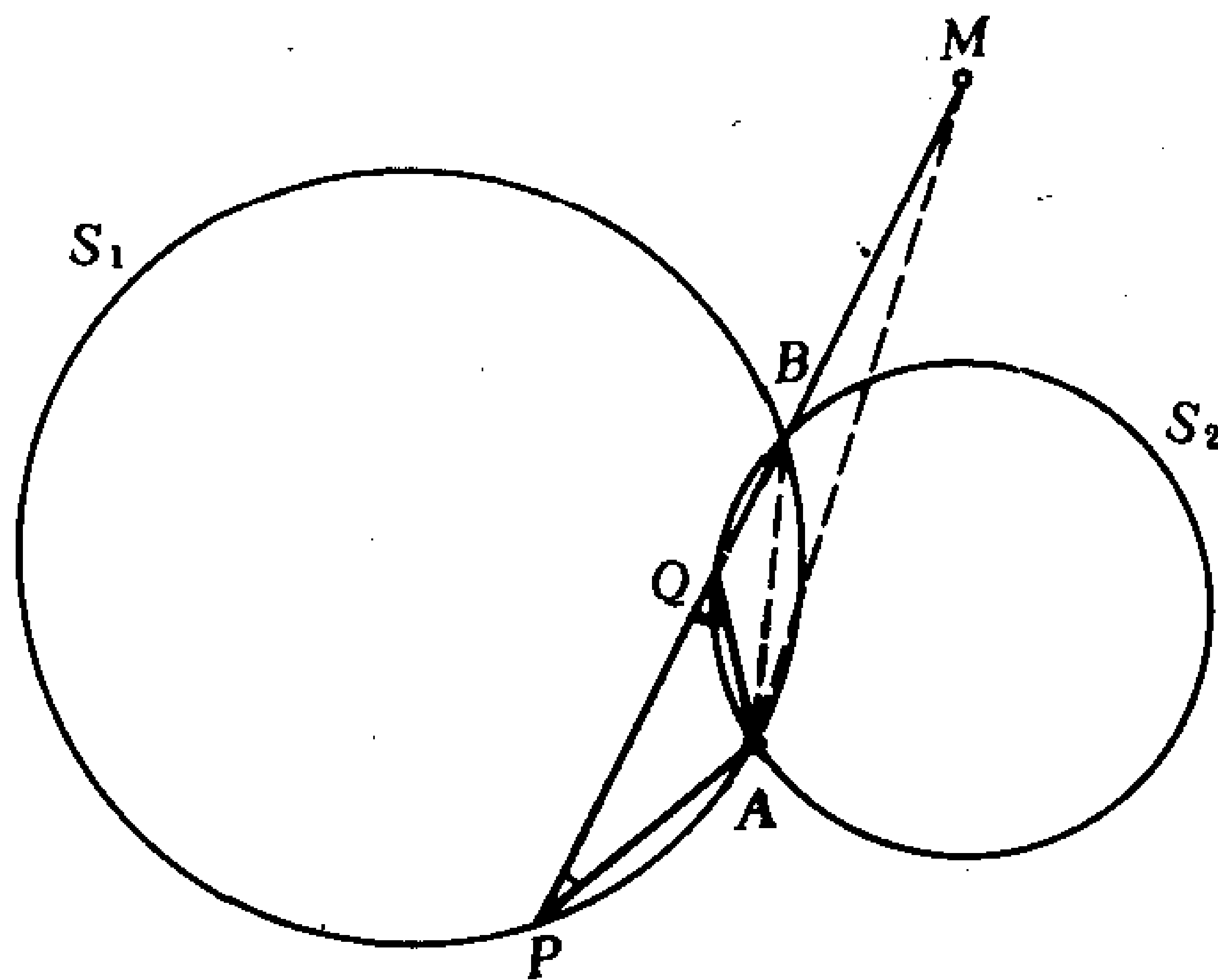


图 127

显然，圆 S 过点 A．我们现在证明它也过点 B．为此只要在圆 S_1 上找一点 C，使得 $\angle CAB=\angle PAM$，因为 $\angle ACB=\angle APM$，$\triangle ACB$ 和 $\triangle APM$ 必定相似（于是 $AC/AB=AP/AM$），所以上面所述的螺旋相似把 C 变到 B．

所求的轨迹现在可以用如下方法作出：过圆 S_1 与 S_2 的交点 A 和 B 之一引任意一条直线分别交 S_1 和 S_2 于 P 和 Q．在这直线上取一点 M，使得 $MP/MQ=m^2/n^2$，这里 m/n 是给定的

切线长度之比. 过 A,B,M 的圆(更确切地说,这个圆在 S_1和S_2之外的弧)即为所求的轨迹.

65. 所有这样的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 有共同的旋转中心 O, 并且圆 $AB'C'$ 与圆$BA'C'$ 的一个交点和 O 重合(见定理 3 的证明). 剩下仅须考虑当 A', B', C' 是$\triangle ABC$ 的各边中点时,$\triangle A'B'C'$ 的这个特别位置.

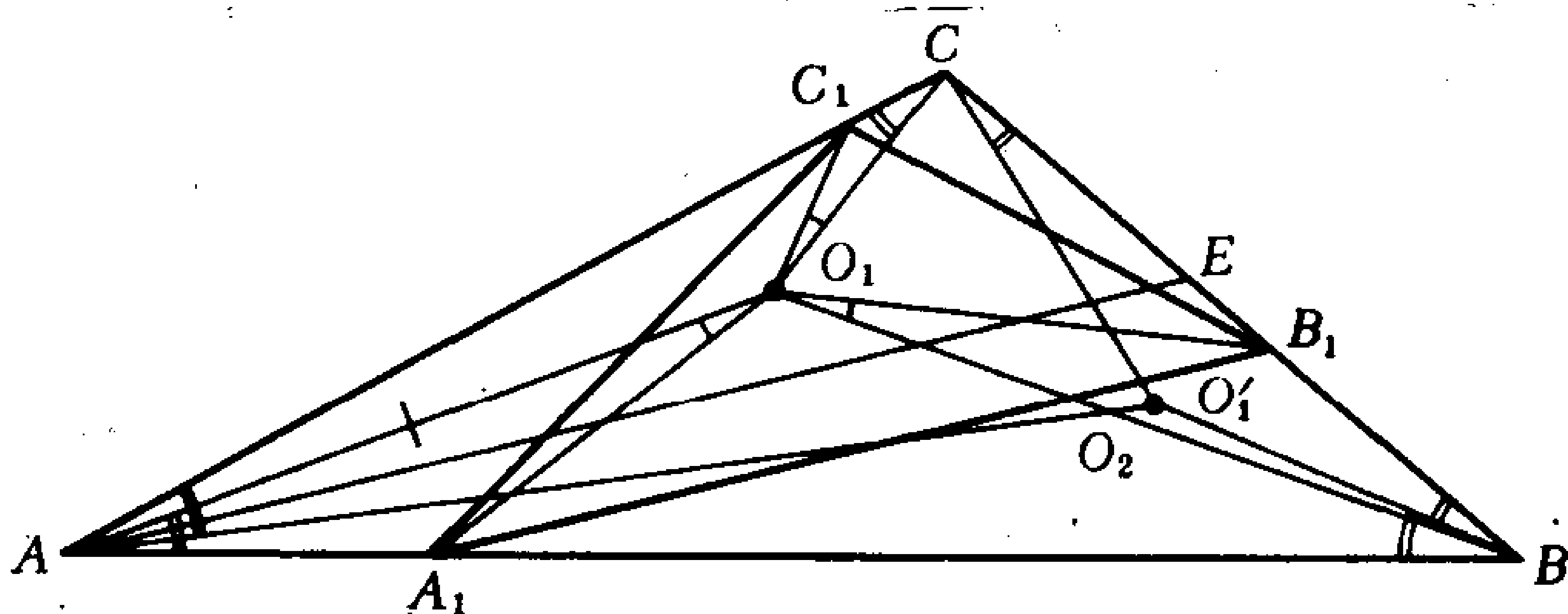


图 128

66. (a) 因为 O_1 是$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的旋转中心, 我们有(见图 128)

$$\angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1 = \angle CO_1C_1,$$
$$\frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{O_1C}{O_1C_1}, \qquad (*)$$

所以三角形 $AO_1A_1, BO_1B_1, CO_1C_1$ 彼此相似. 因此

$$\angle O_1AB = \angle O_1BC = \angle O_1CA. \qquad (**)$$

同理可证

$$\angle O_2BA = \angle O_2CB = \angle O_2AC. \qquad (***)$$

反之, 若点 O_1 使条件(**)满足, 则它是$\triangle ABC$ 的第一旋转中心. 事实上, 过 O_1 引三条直线 O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1, 使它们分别交$\triangle ABC$ 的边于 A_1, B_1, C_1, 并与这些边构成等角. 三角形

$AO_1A_1, BO_1B_1, CO_1C_1$ 是相似的（由于对应角相等），所以条件（＊）满足，且 O_1 是$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的旋转中心，即 O_1 是$\triangle ABC$ 的第一旋转中心. 用同样方法可证，若条件（＊＊＊）满足，则点 O_2 是$\triangle ABC$ 的第二旋转中心.

现在我们证明 $\angle O_1AB=\angle O_2AC$. 为此，分别作直线 AO_1, BO_1, CO_1 关于角 A，B，C 的平分线的对称直线，我们来证明所得的三条直线交于一点 O_1'. 用 m，n，p 分别表示 O_1 到三角形 ABC 的边 AB，BC，CA 的距离. 直线 AO_1 是与三角形的边 AB 和 AC 的距离之比为 $m:p$ 的点的轨迹（图 128）. 同样，BO_1 关于$\angle B$ 的平分线的对称直线是到 BA 和 BC 的距离之比为 $n:m$ 的点的轨迹，CO_1 关于$\angle C$ 的平分线的对称直线是到 CA 和 CB 距离之比为 $n:p$ 的点的轨迹. 由此即知，所作三条直线中后两条直线的交点 O_1' 到边 AB 与 AC 的距离之比为 $p:m$，亦即 O_1' 属于所作三条直线中的第一条.

从点 O_1 所满足的条件（＊＊）可知，O_1' 满足等式

$$\angle O_1'BA=\angle O_1'CB=\angle O_1'AC.$$

（因为 $\angle O_1AB=\angle O_1'AC$，$\angle O_1BC=\angle O_1'BA$，$\angle O_1CA=\angle O_1'CB$）. 所以 O_1' 与$\triangle ABC$ 的第二旋转中心 O_2 重合，因而

$$\angle O_1AB=\angle O_2AC.$$

(b) 命 O 同时是$\triangle ABC$ 的第一和第二旋转中心（图 129）. 因为 O 是第一旋转中心，我们有$\angle OAB=\angle OBC=\angle OCA$；因为 O 又是第二旋转中心，我们又有$\angle OBA=\angle OCB=\angle OAC$. 由此立即得到$\angle A=\angle B=\angle C$，即$\triangle ABC$ 是等边三角形.

(c) 这里最方便的证法是用下面问题 68 的结果. 由这些结果，全等三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 的外接圆心 O_1' 和 O_2' 重合（在图 130 中这些中心与 O' 重合）. 因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是由$\triangle ABC$ 经

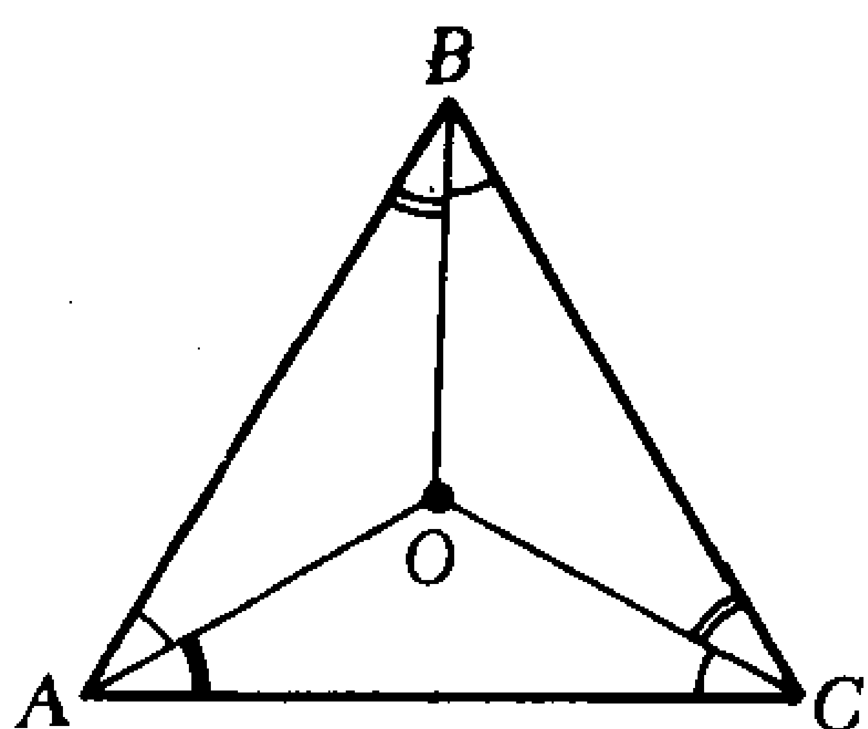


图 129

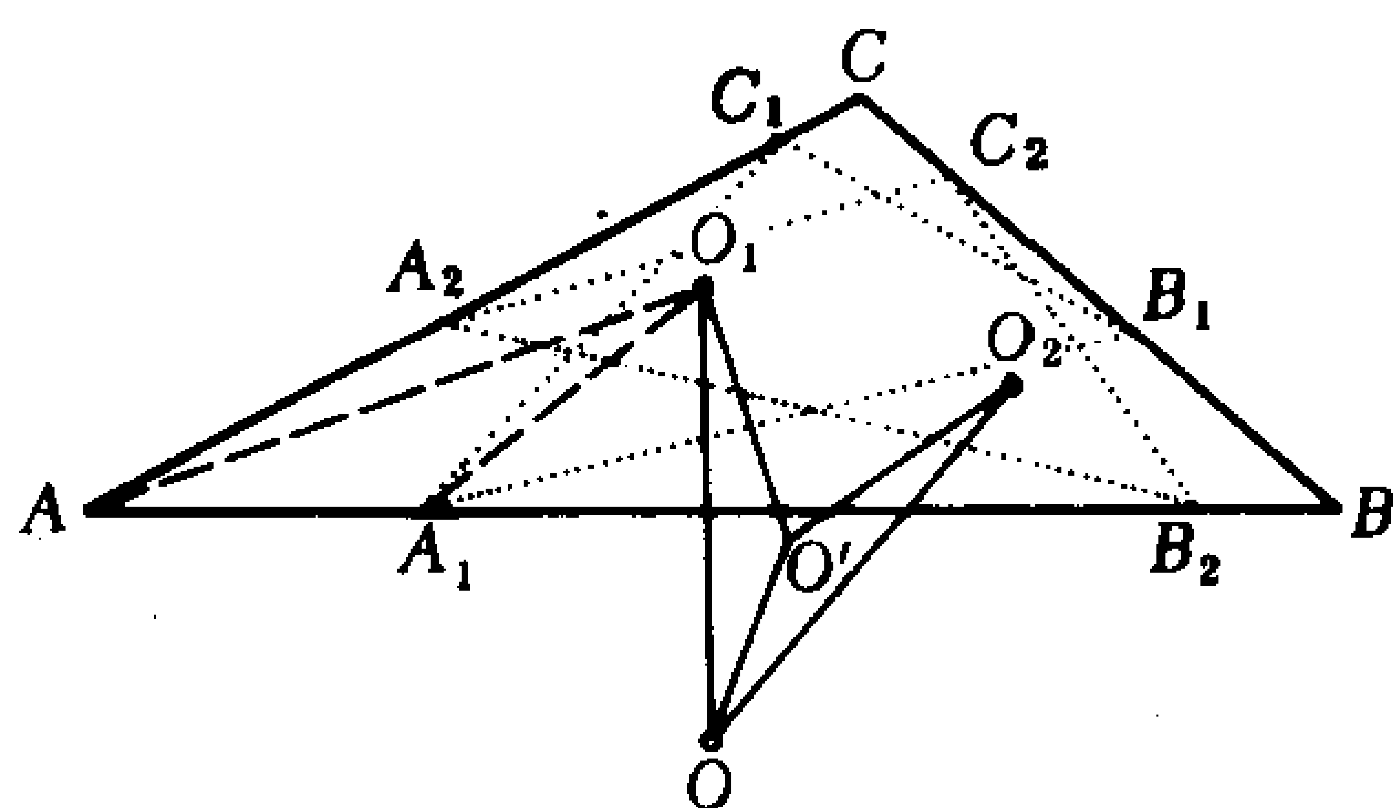


图 130

过以 O_1 为中心，转角为 α，相似系数为某个 k 的螺旋相似得到的，我们有 $\angle O'O_1O=\alpha$，$O_1O'/O_1O=k$；因为 $\triangle A_2B_2C_2$ 是由 $\triangle ABC$ 经过以 O_2 为中心，同样的转角 α（因为 A_1B_1 和 A_2B_2 与 AB 构成等角）和同样的相似系数 k（因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 全等）的螺旋相似得到的，我们有 $\angle O'O_2O=\alpha$，$O_2O'/O_2O=k$．由此即知 $\triangle O_1OO'$ 与 $\triangle O_2OO'$ 相似，又因为它们有一公共边 OO'，它们必定是全等的，所以 $OO_1=OO_2$．

注意从 $\triangle O_1OO'$ 与 $\triangle O_1AA_1$ 相似可知，$\angle O_1OO'=\angle O_1AA_1$，从而 $\angle O_1OO_2=2\varphi$，这里 φ 是 $\angle O_1AB$，$\angle O_1BC$，$\angle O_1CA$，$\angle O_2AC$，$\angle O_2CB$，$\angle O_2BA$ 的公共值．结合 (d) 的结论，可知 $O_1O_2\leqslant O_1O=O_2O$（并且等号仅对等边三角形成立，这时所有三个点 O_1, O_2, O 重合）．

(d) 这个定理的证明将用到问题 70 中的图形（见图 137）．让我们用外接圆半径 R 和角 φ 来确定乘积 $AO_1\cdot O_1A'=BO_1\cdot O_1B'=CO_1\cdot O_1C'$．由 $\triangle AO_1C'$ 和 $\triangle A'BO_1$ 相似〔见问题 70 (b)〕容易得到

$$\frac{AO_1}{AC'}=\frac{A'B}{A'O_1},$$

从而有

$$AO_1 \cdot O_1A' = AC' \cdot A'B.$$

又因为 $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{A'B} = 2\varphi$，我们有 $AC' = A'B = 2R\sin\varphi$. 于是有 $AO_1 \cdot O_1A' = 4R^2\sin^2\varphi$.

在另一方面(见图 137)，有

$$AO_1 \cdot O_1A' = MO_1 \cdot O_1N = (R - OO_1)(R + OO_1)$$
$$= R^2 - OO_1^2 \leqslant R^2.$$

由此可知

$$4R^2\sin^2\varphi \leqslant R^2; \quad \sin^2\varphi \leqslant \frac{1}{4}, \quad \varphi \leqslant 30°,$$

而且仅当 O_1 与 O 重合($OO_1 = 0$)，即$\triangle ABC$ 是等边三角形时有 $\varphi = 30°$〔见问题中(c)，(b)〕.

67. 要使 O_1 是$\triangle ABC$ 的第一旋转中心，必须而且只须

$$\angle O_1AB = \angle O_1BC = \angle O_1CA.$$

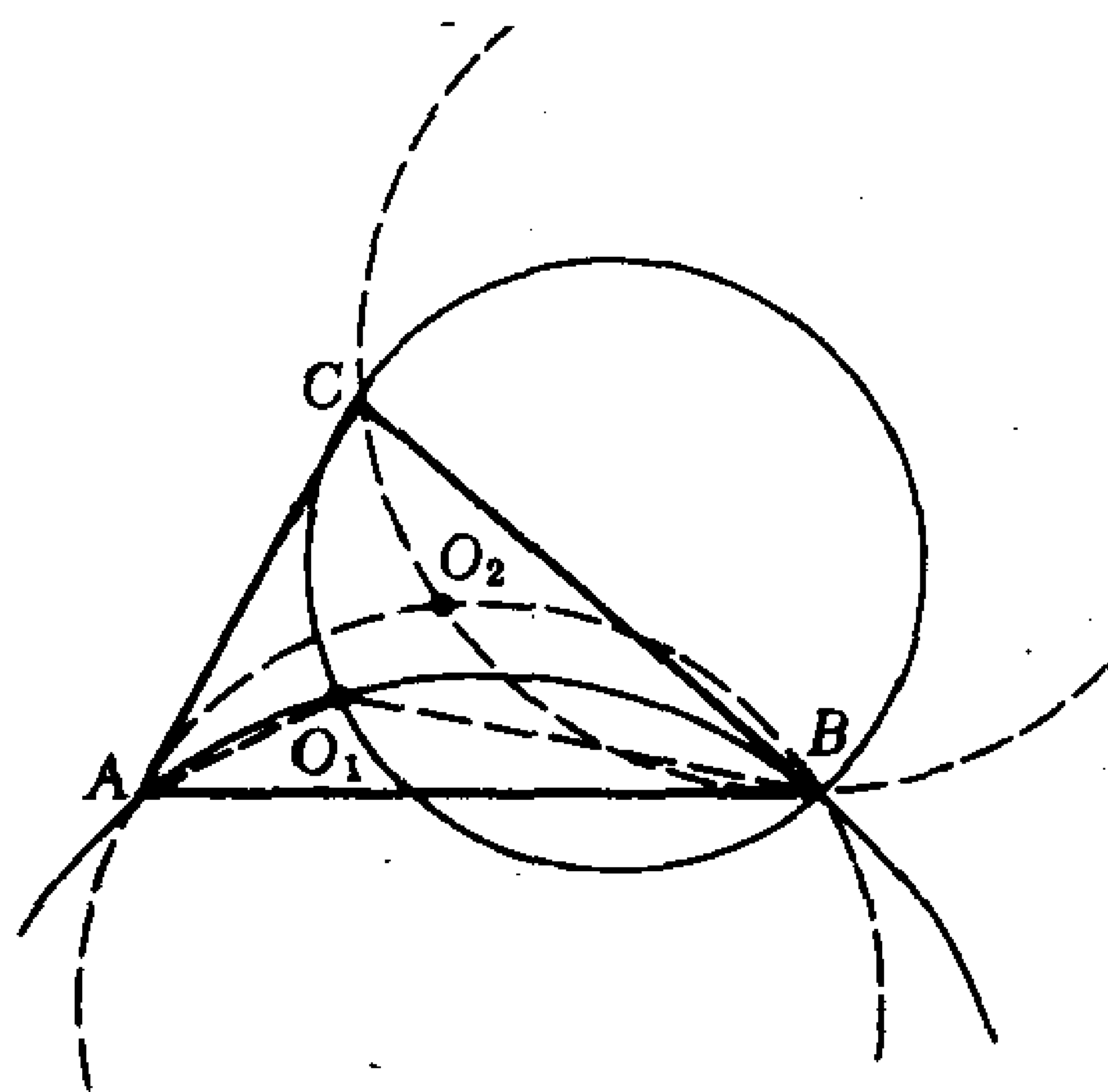


图 131

现在假设第一旋转中心已找到，作张在线段 AB 并且过 O_1 的圆弧(图 131). 因为 $\angle O_1AB = \angle O_1BC$，可知 $\angle O_1BC$ 等于圆弧 BO_1 的度量的一半，所以直线 BC 与过 B，O_1，A 的圆相切. 同理可证$\triangle ABC$ 的边 CA 和 AB 分别与过 B，C，O_1 的圆和过 C，A，O_1 的圆相切. 所以$\triangle ABC$ 的第一旋转中心 O_1 可以作为这样两个圆的交点作出来：一个圆过 A 和 B 并与边 BC 相切，另一个过 B 和 C 并与边 CA 相切. 第二旋转中心可用类

似的方法作出.

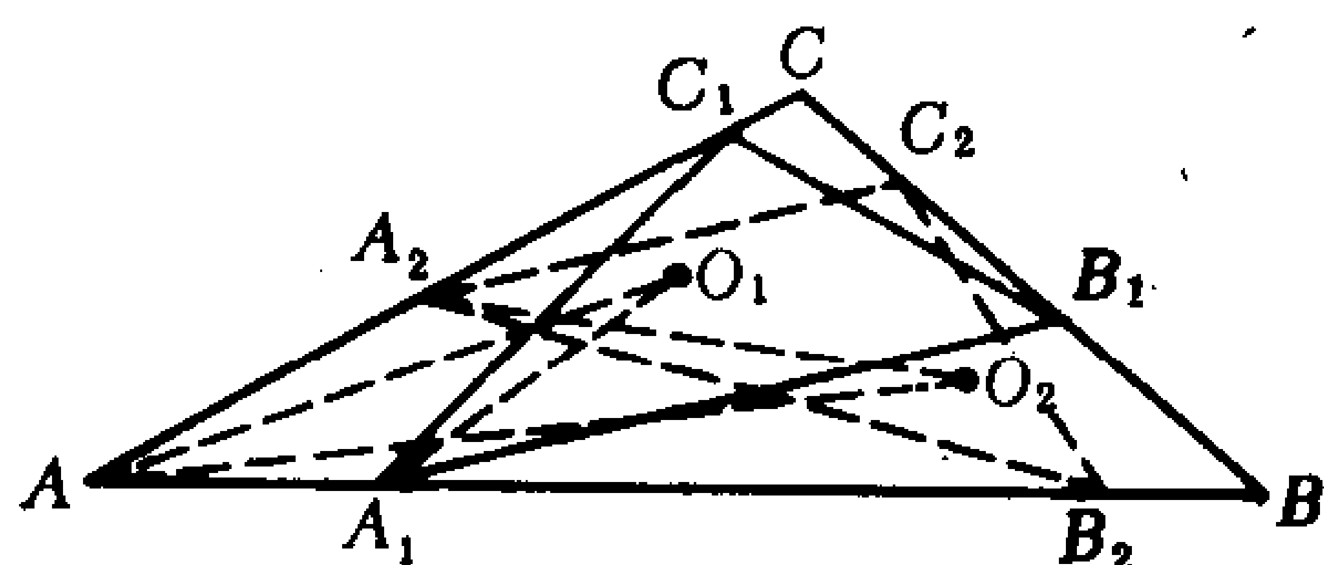


图 132

68. (a) 三角形 $A_1B_1C_1$ 可由三角形 ABC 先作一个绕点 O_1,转角为 AO_1A_1 的旋转,再作一个系数为 O_1A_1/O_1A 的中心相似得到. 所以直线 AB 与 A_1B_1 的夹角等于 $\angle AO_1A_1$ (图132). 同理可证直线 AB 与 A_2B_2 的夹角等于 $\angle AO_2A_2$. 于是由本题的条件我们有

$$\angle AO_1A_1 = \angle AO_2A_2.$$

但是由问题 66 (a) 可知 $\angle O_1AA_1 = \angle O_2AA_2$. 因此 $\triangle AO_1A_1$ 与 $\triangle AO_2A_2$ 相似,从而有

$$\frac{O_1A_1}{O_1A} = \frac{O_2A_2}{O_2A},$$

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似系数等于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似系数. 由此即知 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 全等.

(b) 我们来证明 $B_2C_1 /\!/ BC$ (图 133). 由问题 66 (a) 和 68(a) 的解可知 $\triangle CO_1C_1$ 和 $\triangle BO_2B_2$ 相似,所以有

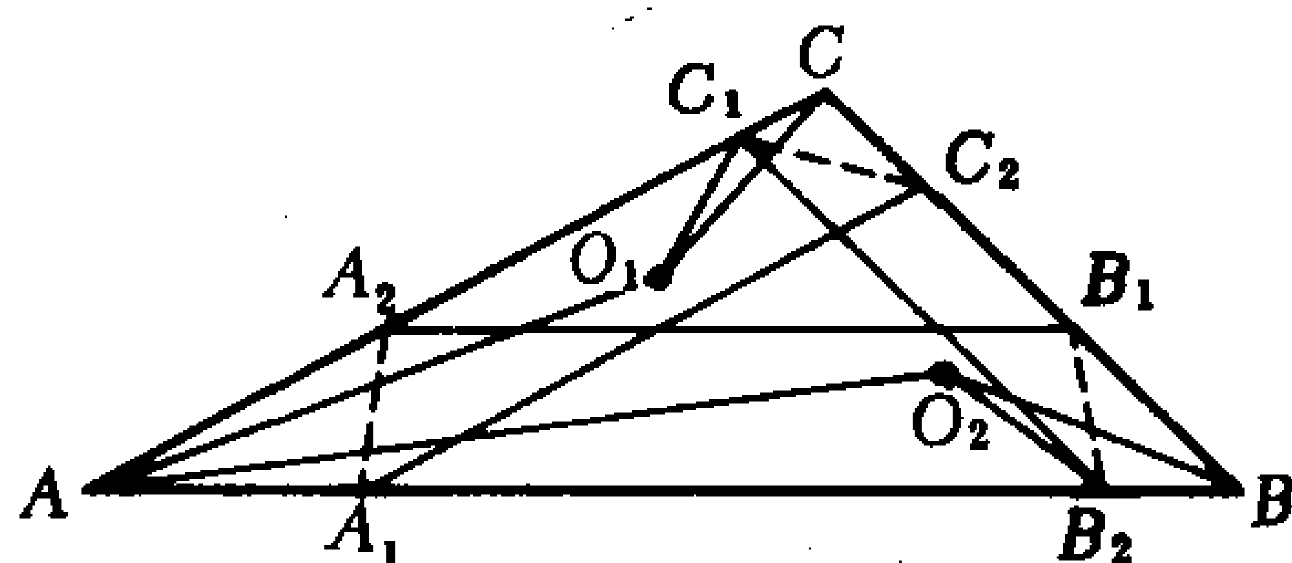


图 133

$$\frac{CC_1}{BB_2} = \frac{CO_1}{BO_2}.$$

又由问题 66(a)可知 $\angle O_1CA = \angle O_2BA$, $\angle O_1AC = \angle O_2AB$, 所以 $\triangle CO_1A$ 与 $\triangle BO_2A$ 相似, 因而

$$\frac{CO_1}{BO_2} = \frac{AC}{AB}.$$

于是我们有

$$\frac{CC_1}{BB_2}=\frac{AC}{AB}.$$

这就证明了我们的断言.

用同样的方法可以证明 $C_2A_1 // CA$ 和 $A_2B_1 // AB$.

我们进一步证明直线 A_1A_2 反平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC. 由 $\triangle AO_1A_1$ 和 $\triangle AO_2A_2$ 相似,我们有

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{O_1A}{O_2A}.$$

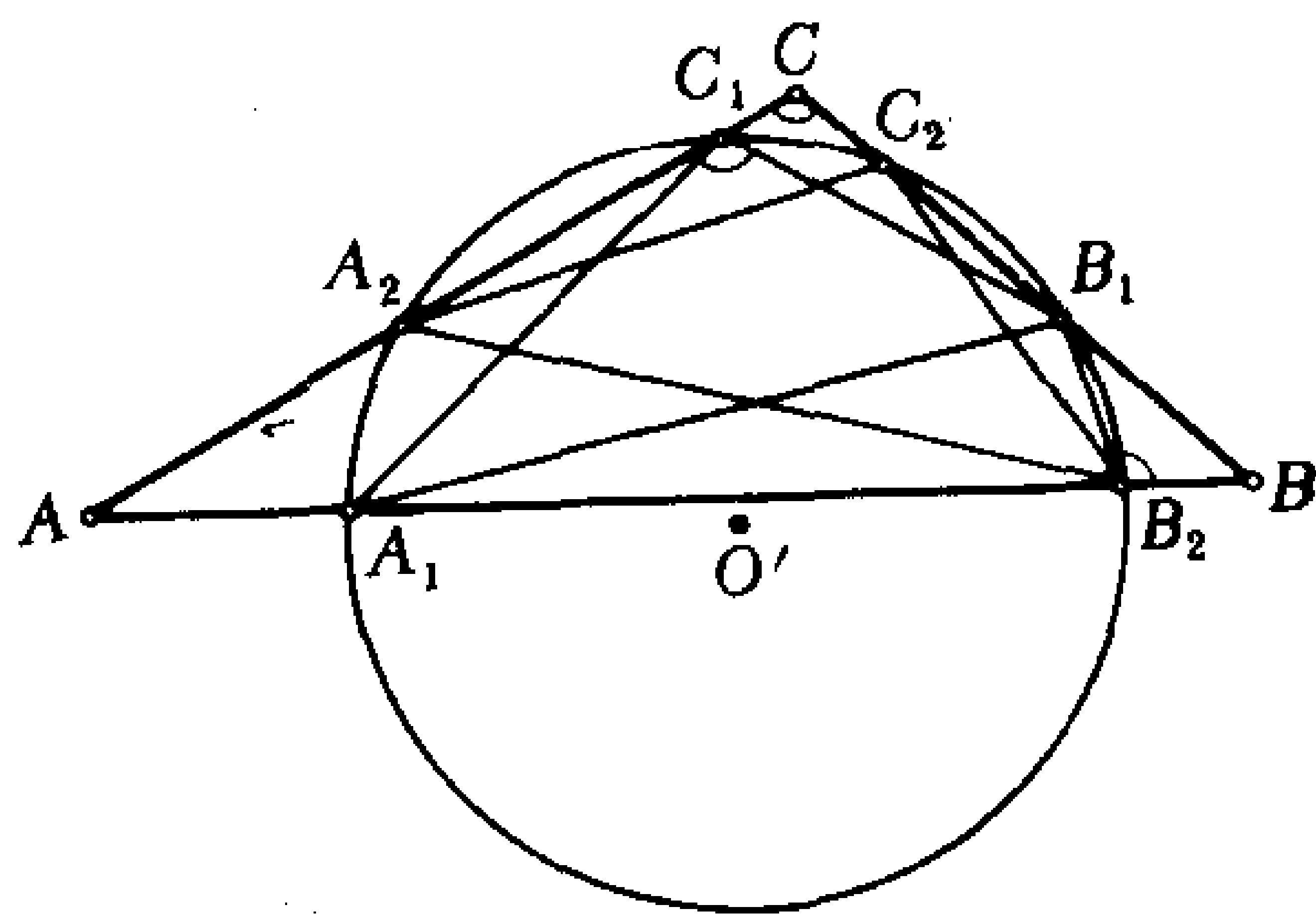


图 134

又由 $\triangle CO_1A$ 与 $\triangle BO_2A$ 相似,我们有

$$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AC}{AB}.$$

比较所得到的两个比例式,可得

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AC}{AB}.$$

由此可知 $\triangle AA_1A_2$ 和 $\triangle ACB$ 相似,因而直线 A_1A_2 反平行于 BC. 用同样方法可证 B_1B_2 反平行于 CA, C_1C_2 反平行于 AB.

(c) 考虑四边形 $B_1C_1A_1B_2$. 在这四边形中,因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 相似,所以 $\angle B_1C_1A_1=\angle C$;另外,$\angle A_1B_2B_1=180°-\angle B_1B_2B$ (见图 134). 但是因为 B_1B_2 反平行于 $\triangle ABC$ 的边 CA,我们有 $\angle B_1B_2B=\angle C$,因而

$$\angle B_1C_1A_1+\angle A_1B_2B_1=180°.$$

由此可知,B_2 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆上. 用同样方法可证 C_2 和 A_2 也在这个圆上.

69. (a) 由于在直角三角形 AA_1O_1, BB_1O_1 以及 CC_1O_1 中,

$\angle O_1AA_1$，$\angle O_1BB_1$，$\angle O_1CC_1$ 都相等〔参看问题 66(a)〕，可见这些三角形全都相似（图 135）. 所以 $\angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1 = \angle CO_1C_1$，并且 $O_1A/O_1A_1 = O_1B/O_1B_1 = O_1C/O_1C_1$；这就是说 $\triangle A_1B_1C_1$ 可以由 $\triangle ABC$ 经过一个以 O_1 为中心的螺旋相似得到. 因而 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. 同理可证 $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$.

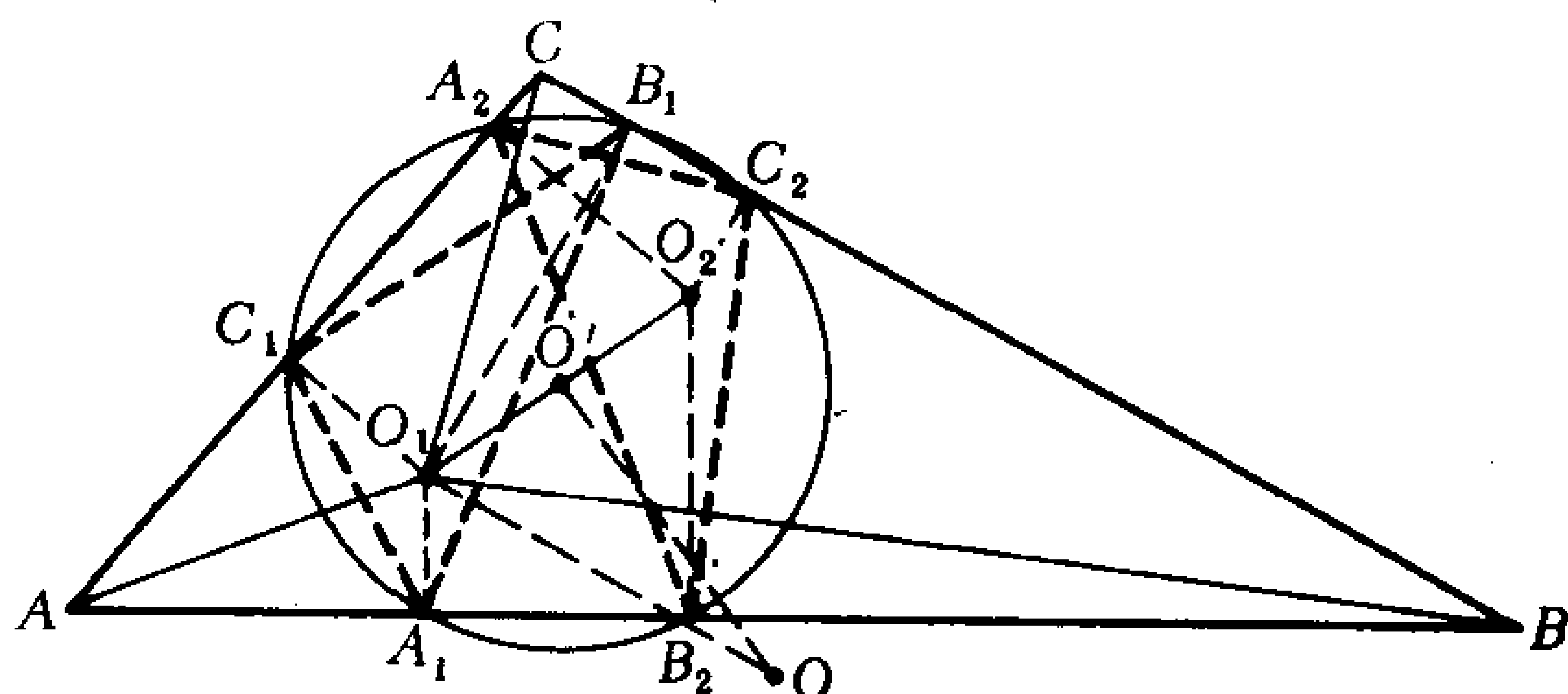


图 135

直角三角形 AA_1O_1 和 AA_2O_2 是相似的〔见问题 66(a)〕，所以，$\triangle ABC$ 旋转到 $\triangle A_1B_1C_1$ 所转过的角 AO_1A_1 与 $\triangle ABC$ 旋转到 $\triangle A_2B_2C_2$ 所转过的角 AO_2A_2 相等. 因而直线 A_1B_1 和 A_2B_2 与 AB 构成的角也相等. 又 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都内接于 $\triangle ABC$，于是，对于 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 问题 68 中的条件满足. 因此，问题 68 的全部结论可应用于这两个三角形.

从 $\triangle O_1OO'$ 与 $\triangle O_1AA_1$ 的相似性，我们有 $\angle O_1O'O = \angle O_1A_1A = 90°$，这里的 $\triangle O_1OO'$ 是问题 66(c) 的解答中所考虑过的三角形（见图 135）. 由此即知 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆的公共中心 O' 是 O_1O_2 的中点.

(b) 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边分别平行于三角形 ABC 的各条高. 若它的顶点依次落在 $\triangle ABC$ 的边上（如图 136 所示），这时 A_1B_1 可以平行于高 CF 或高 BE（但不能平行于高 AD！）. 若

$A_1B_1 /\!/ CF$，则 $A_1C_1 /\!/ BE$；若 $A_1B_1 /\!/ BE$，则 $B_1C_1 /\!/ CF$. 所以有两种可能方式在给定三角形 ABC 中作内接三角形，使得它的各条边分别平行于三角形 ABC 的各条高，即有两个这样的内接三角形〔见问题 9(b)〕. 在图 136 中，这两个三角形分别用 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 表示. 它们都相似于 $\triangle ABC$（我们用相同的字母表示它们对应的顶点）. 容易看出，它们满足问题 68 中的所有条件，因此这两个三角形全等〔见问题 68(a)〕.

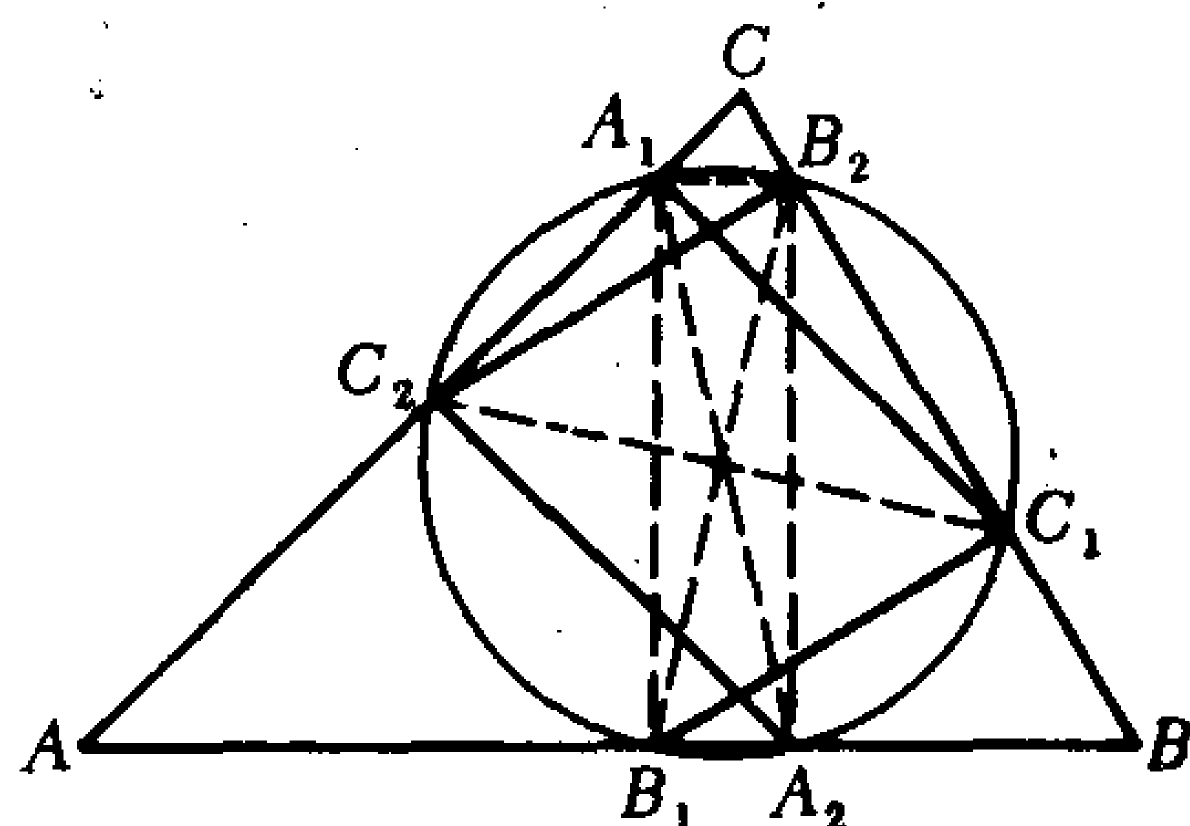


图 136

现在考虑四边形 $A_1B_1A_2B_2$. 因为有 $A_1B_1 = A_2B_2$，$A_1B_1 /\!/ A_2B_2$ 和 $A_1B_1 \perp B_1A_2$，所以这四边形是矩形，因此它的两条对角线相等并且被它们的交点所平分. 用同样的方法可证线段 B_1B_2 和 C_1C_2 相等并且被它们的交点平分. 所以联结 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 对应顶点的三条线段都相等，并且被它们的公共交点所平分. 这个公共交点就是 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的公共外接圆的中心〔见问题 68(c)〕.

70. (a) 用 φ 表示 $\angle A'AB$ 的大小. 因为

$$\angle A'AB = \angle B'BC = \angle C'CA = \varphi,$$

我们有 $\overset{\frown}{BA'} = \overset{\frown}{CB'} = \overset{\frown}{AC'} = 2\varphi$. 因而 $\triangle C'A'B'$ 是由 $\triangle ABC$ 经过绕外接圆圆心 O 旋转一个 2φ 角得到的(图 137).

(b) 例如，对 $\triangle AO_1C'$ 我们有

$$\angle AO_1C' = \frac{\overset{\frown}{AC'} + \overset{\frown}{CA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{CA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \angle BAC,$$

$$\angle C'AO_1 = \frac{\overset{\frown}{C'B} + \overset{\frown}{BA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{C'B} + \overset{\frown}{AC'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \angle ACB,$$

所以 $\triangle AO_1C'$ 与$\triangle ABC$ 相似. 对剩下的五个三角形，证明是类似的.

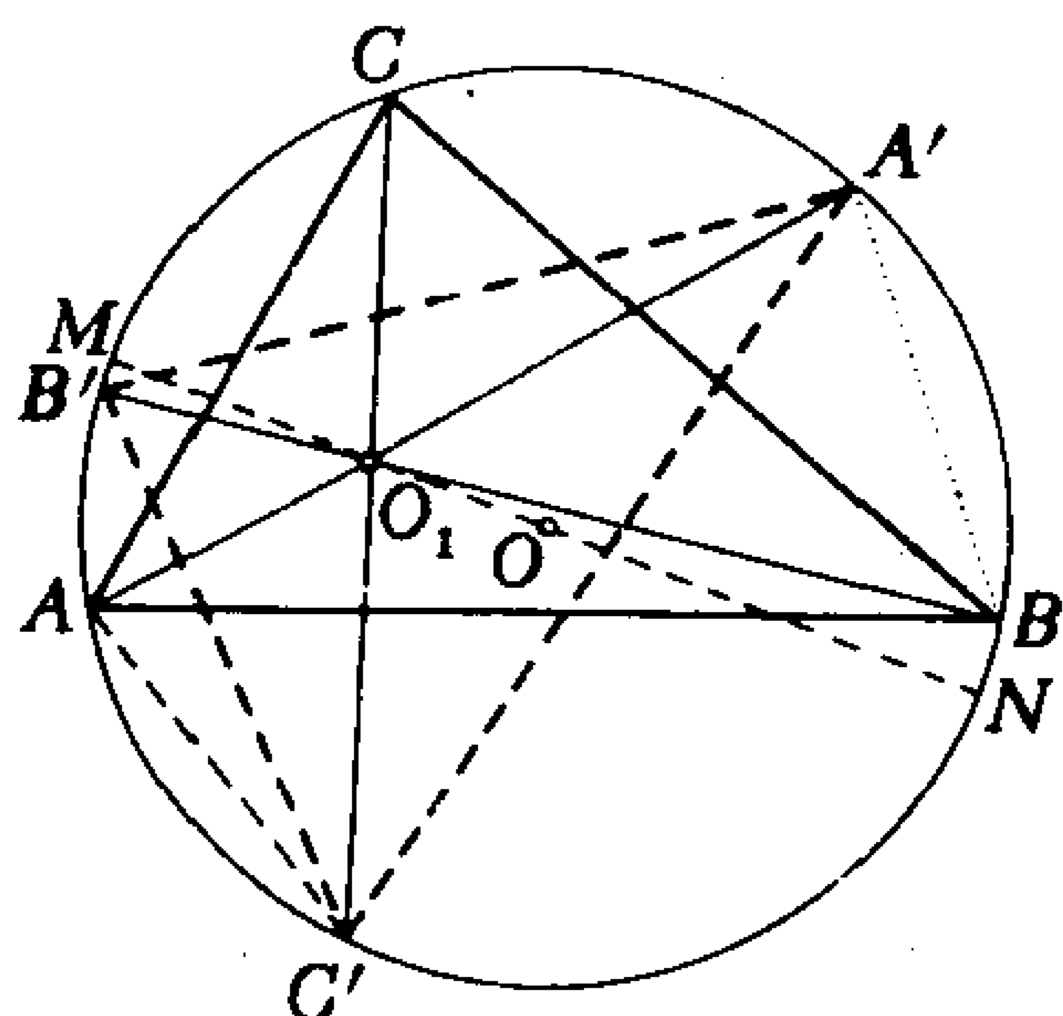


图 137

71. 联结$\triangle ABC$ 的第一旋转中心 O_1 和这三角形的各个顶点（图 138）. 点 M 落在$\triangle ABO_1$，$\triangle BCO_1$ 和$\triangle CAO_1$ 的某一个之中. 例如，若 M 落在$\triangle ABO_1$ 内（或在它的边界上）（图 138），$\angle MAB \leqslant \angle O_1AB \leqslant 30°$〔见问题 66 (d)〕. 类似地可证 $\angle MAC$，$\angle MCB$，$\angle MBA$ 之中至少有一小于或等于 30°（与$\triangle ABO_1$，$\triangle BCO_1$，$\triangle CAO_1$ 类似，必须考虑$\triangle ACO_2$,$\triangle CBO_2$,$\triangle BAO_2$，这里 O_2 是$\triangle ABC$ 的第二旋转中心）.

事实上，从证明可知，$\angle MAB$，$\angle MBC$，$\angle MCA$ 中至少有一个总是严格小于 30° 的，只有当$\triangle ABC$ 是等边三角形，并且 M 是它的中心时是唯一的例外情形（在这种情形 $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA = 30°$）.

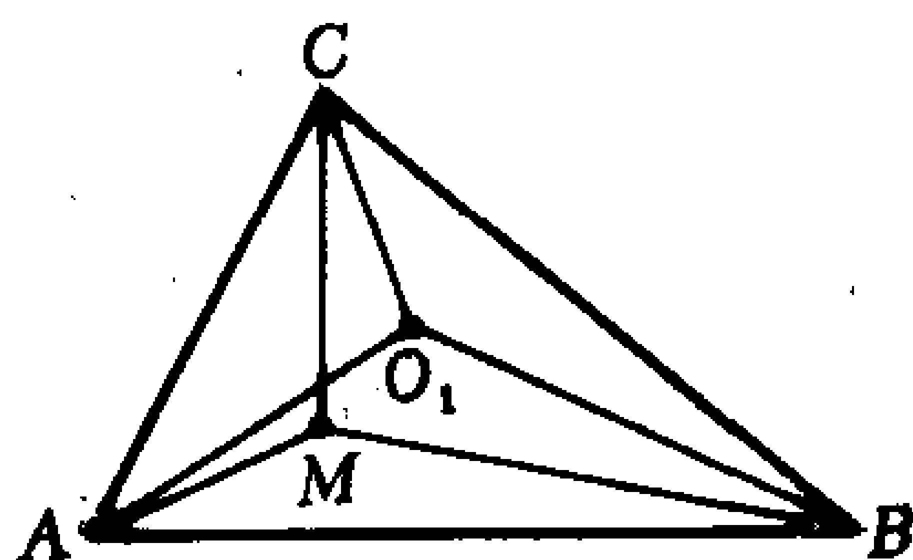


图 138

72. (a)，(b) 命 V 是 $\triangle A_1A_2D_3$ 和 $\triangle A_1A_3D_2$ 的外接圆的交点，并且它不是 A_1 点. 用 D_1,D_2和D_3 分别表示 $\triangle D_1D_2D_3$ 的各个角，我们有（图 139）

$$\angle A_1VA_2 = \angle D_3,$$

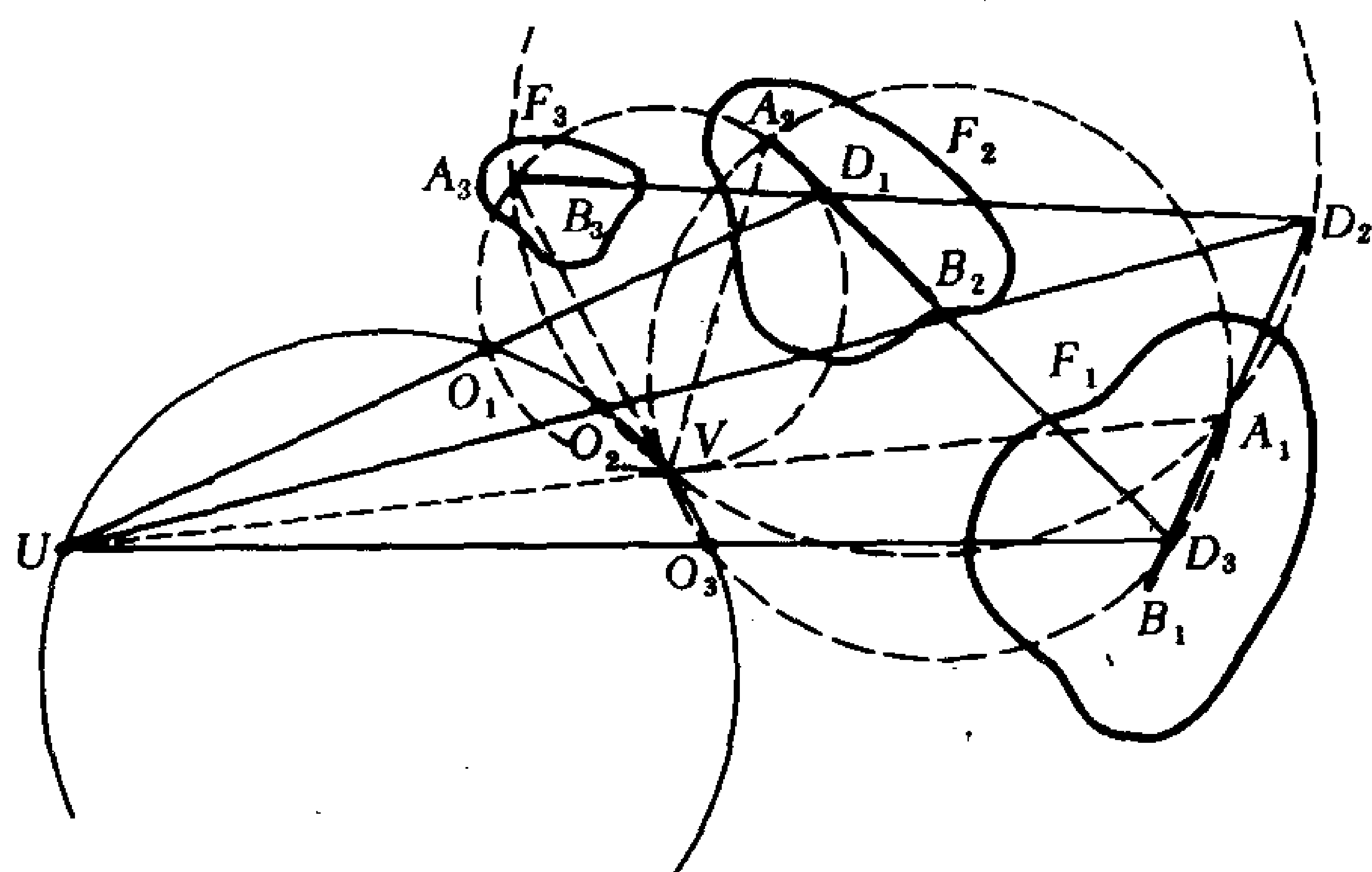


图 139

$$\angle A_1VA_3 = 180° - \angle D_2,$$

因而有

$$\angle A_2VA_3 = \angle A_3VA_1 - \angle A_2VA_1$$
$$= 180° - \angle D_2 - \angle D_3 = \angle D_1.$$

所以 $\triangle A_2A_3D_1$ 的外接圆也过 V.

注意，由旋转中心的作法〔见图 30 (b)〕知道，O_1 在 $\triangle A_2A_3D_1$ 的外接圆上，O_2 在 $\triangle A_1A_3D_2$ 的外接圆上，O_3 在 $\triangle A_1A_2D_3$ 的外接圆上；而且如前面所证，所有这三个圆都过一公共点 V.

现在用 U 表示直线 D_2O_2 和 D_3O_3 的交点. 于是我们有（见图 139）

$$\angle O_2VO_3 = \angle D_2O_2V + \angle D_3O_3V - \angle O_2UO_3$$

（为了证明这个等式，只需用对角线 UV 把四边形 O_2VO_3U 分成两个三角形，并且对这两个三角形应用外角定理）. 因为点 D_2, O_2, V, A_1 在一圆上，我们有

$$\angle D_2O_2V = 180° - \angle D_2A_1V.$$

类似地有

$$\angle D_3O_3V = 180° - \angle D_3A_1V.$$

由此可得

$$\angle D_2O_2V + \angle D_3O_3V = 180°.$$

所以有

$$\angle O_2VO_3 = 180° - \angle O_2UO_3,$$

亦即点 O_2, O_3, U, V 在一个圆上.

命 $\bar{V}$ 表示 $\triangle B_1B_2D_3$, $\triangle B_1B_3D_2$, $\triangle B_2B_3D_1$ 的外接圆的公共交点. 和前面一样，我们可以证明 $O_2, O_3, U, \bar{V}$ 在一个圆上. 由此即知五个点 $O_2, O_3, V, \bar{V}, U$ 在一个圆上. 同理可证点 $O_1, O_3, V, \bar{V}$ 在一个圆上. 由两个四点组 $O_1, O_3, V, \bar{V}$ 和 $O_2, O_3, V, \bar{V}$ 都各自落在一个圆上这个事实，我们知道这两个圆必定彼此重合，并且与图形 F_1, F_2, F_3 的相似圆重合. 这就完成了 (b) 的证明. 此外，我们知道 D_2O_2 和 D_3O_3 的交点 U 在这圆上. 换句话说，直线 D_2O_2 经过直线 D_3O_3 与图形 F_1, F_2, F_3 的相似圆的交点 U（它不同于 O_3）；用同样方法可证直线 D_1O_1 也过同一点 U，这就完成了(a)的证明.

(c). 首先假设 $\triangle D_1'D_2'D_3'$ 的边平行于它在 $\triangle D_1D_2D_3$ 中的对应边（图 140）. 由 O_3 是图形 F_1 和 F_2 的旋转中心容易得出：O_3 到直线 $D_2'D_3'$ 和 $D_1'D_3'$ 的距离与 O_3 到 D_2D_3 和 D_1D_3 的距离成比例. 由此可知 D_3' 在直线 O_3D_3 上. 用同样方法可证 D_2' 在直线 O_2D_2 上，D_1' 在直线 O_1D_1 上. 注意到(a)的结果，我们知道 $D_1D_1', D_2D_2', D_3D_3'$ 交于同一点 O，显然 O 是 $\triangle D_1D_2D_3$ 和 $\triangle D_1'D_2'D_3'$ 的相似中心，并且它在图形 F_1, F_2, F_3 的相似圆上.

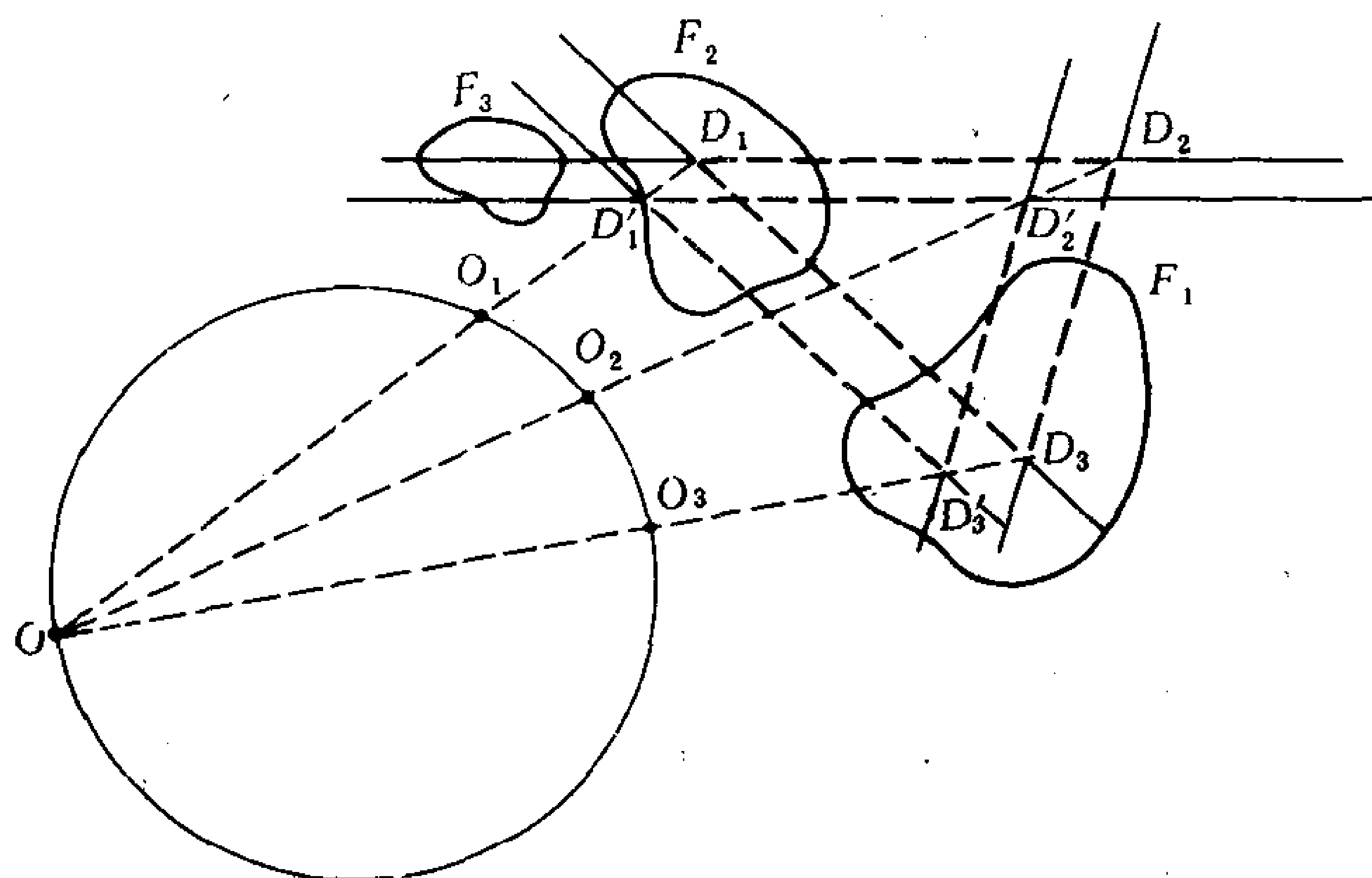


图 140

现在假设 $\triangle D_1' D_2' D_3'$ 的边不平行于它在 $\triangle D_1D_2D_3$ 的对应边. 设 A_1B_1 和 A_1C_1, A_2B_2 和 A_2C_2, A_3B_3 和 A_3C_3 是图形 F_1, F_2, F_3 中的三对对应线段;命 $D_1D_2D_3$和$D_1' D_2' D_3'$ 是两个三角形, 它们的边分别在直线 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 和直线 A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 上〔见正文中图 63 (c)〕. 因为图形 F_1 中直线 A_1B_1和A_1C_1 的夹角等于图形 F_2 中对应直线 A_2B_2和A_2C_2 的夹角, 也等于图形 F_3 中对应直线 A_3B_3和A_3C_3 的夹角, 所以 $\triangle D_1D_2D_3$ 与 $\triangle D_1' D_2' D_3'$ 相似. $\triangle D_1D_2D_3$ 和 $\triangle D_1' D_2' D_3'$ 的旋转中心在过三个点 D_3, D_3', A_1 的圆上(参看两个图形的旋转中心的作图). 但是因为 $\angle D_3A_1D_3' = \angle D_3A_2D_3'$, 所以这个圆也过 A_2. 于是 $\triangle D_1D_2D_3$ 和 $\triangle D_1' D_2' D_3'$ 的旋转中心在 $\triangle A_1A_2D_3$ 的外接圆上. 类似地, 这旋转中心也在 $\triangle A_1A_3D_2$ 和 $\triangle A_2A_3D_1$ 的外接圆上. 由 (b) 可知这些圆的交点在图形 F_1, F_2, F_3 的相似圆上〔参看图 63(c)和图 63(b)〕.

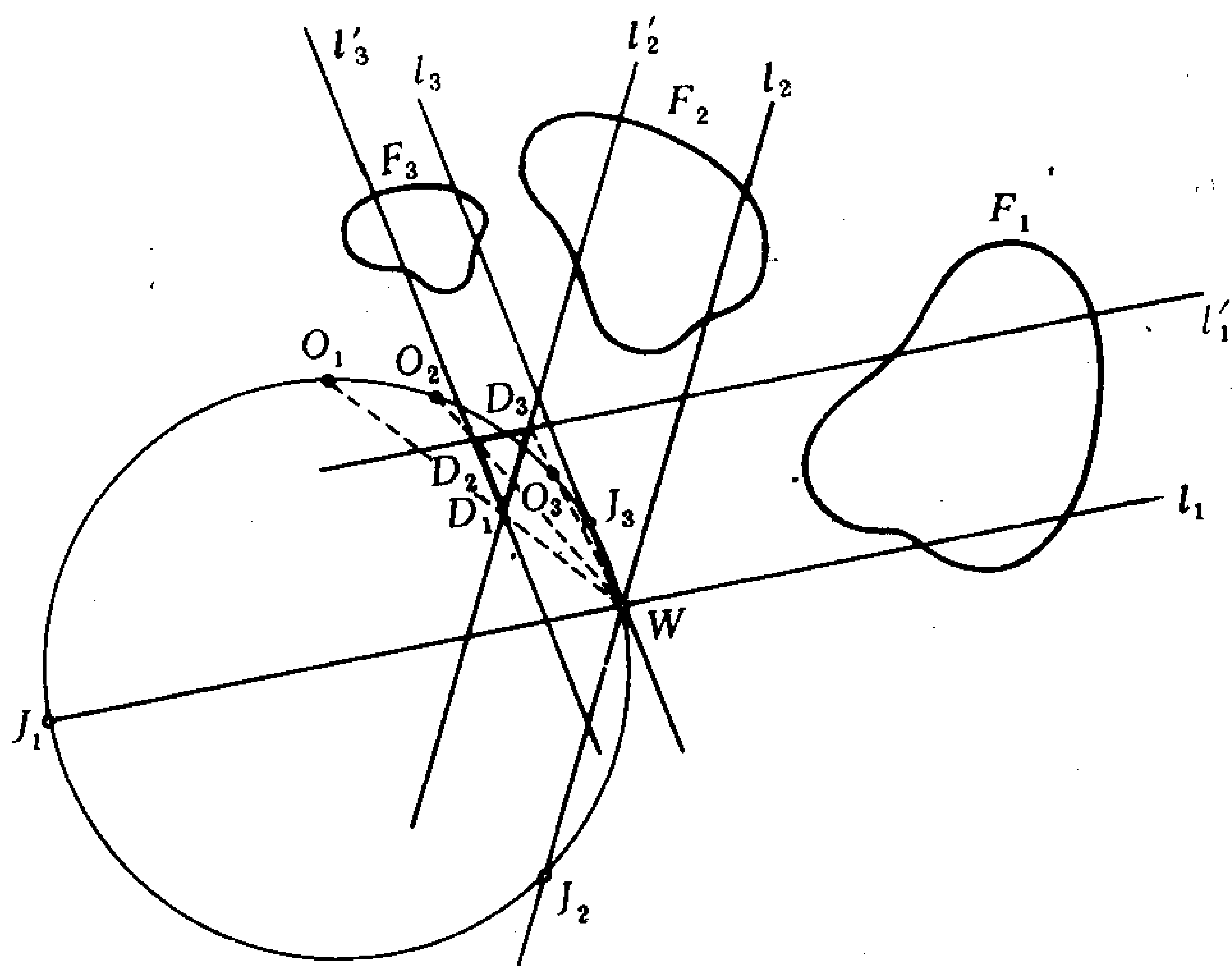


图 141

73. (a) 设 l_1, l_2, l_3 是图形 F_1, F_2, F_3 的三条对应直线，它们交于一点 W；设 l_1' 是图形 F_1 中平行于 l_1 的直线，l_2' 和 l_3' 分别是图形 F_2 和 F_3 中对应于 l_1' 的直线，并设 $D_1D_2D_3$ 是由直线 l_1', l_2', l_3' 所构成的三角形（图 141）. 显然 $l_2' /\!/ l_2, l_3' /\!/ l_3$. 因为 O_3 是 F_1 和 F_2 的旋转中心，O_3 到 l_1 和 l_2 的距离与 O_3 到 l_1' 和 l_2' 的距离成比例. 由此可见直线 O_3D_3 经过 W 点. 同理可证直线 O_2D_2 和 O_1D_1 也过 W. 剩下部分的证明只须应用问题 72 (a) 的结果.

(b) 首先注意 $\triangle D_1D_2D_3$ 的角 D_1（图 141）不依赖于直线 l_1', l_2', l_3' 的选取，它是把 F_2 变到 F_3 的螺旋相似的转角. 此外，从点 O_1 到直线 l_2' 和 l_3' 的距离之比不依赖于这些直线的选取，它等于图形 F_2 和 F_3 的相似系数. 由此可知 $\angle O_1D_1D_2$ 和

$\angle O_1D_1D_3$有定值. 现在若J_2和J_3分别是l_2,l_3与F_1,F_2,F_3的相似圆的交点，则$\angle O_1WJ_2=180°-\angle O_1D_1D_3$和$\angle O_1WJ_3=\angle O_1D_1D_2$，所以$\overset{\frown}{O_1J_2}$与$\overset{\frown}{O_1J_3}$都有定值，因而$J_2$和$J_3$不依赖于直线$l_1,l_2,l_3$的选取. 同理，$l_1$也与图形$F_1,F_2,F_3$的相似圆相交于一个定点$J_1$.

我们留给读者自己去证明：反过来，若U是F_1,F_2,F_3的相似圆上的任意一点，则直线UJ_1,UJ_2,UJ_3是这三个图形中的对应直线.

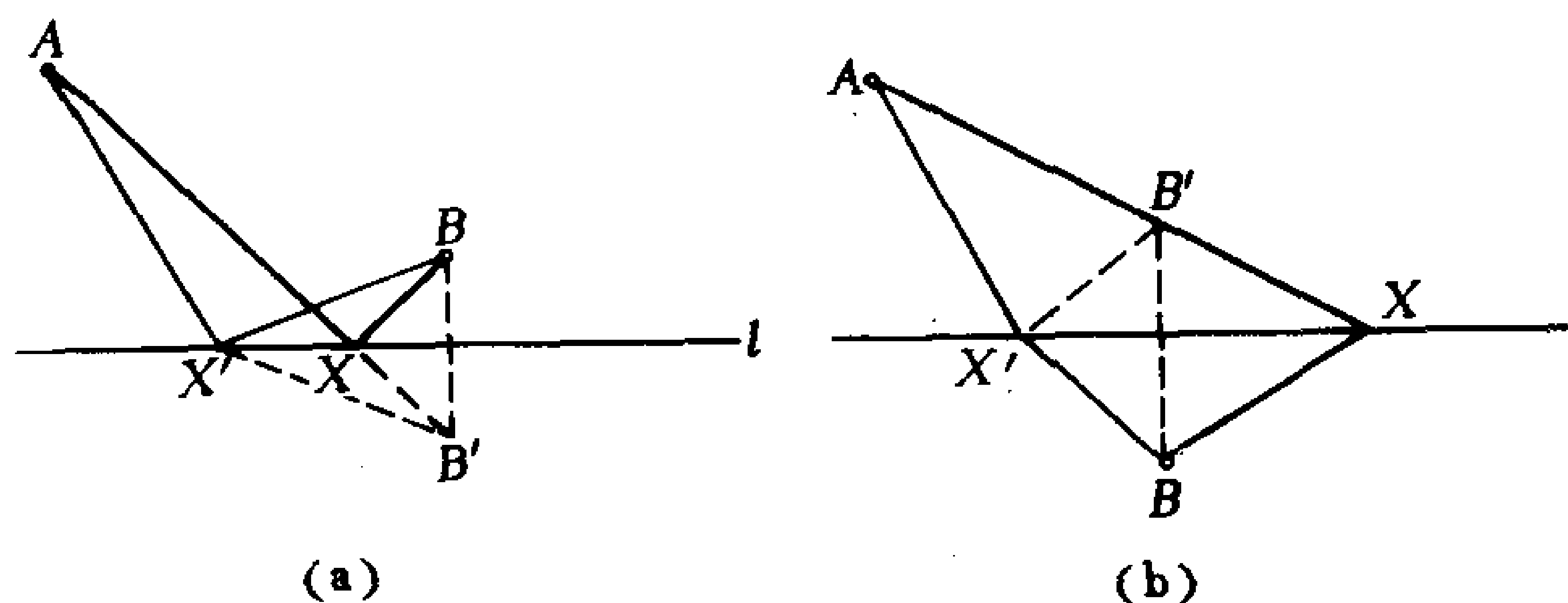


图 142

74. (a) 命B'是B关于直线l的对称点〔图 142 (a)〕. 若X'是l上任意一点，则有

$$AX'+X'B=AX'+X'B'.$$

所以当$AX'+B'X'$最小时，亦即当X'是AB'和l的交点X时，$AX'+BX'$最小.

(b) 命B'是B关于直线l的对称点〔图 142 (b)〕. 若X'是l上任意一点，则$AX'-B'X'\leqslant AB'$. 因为$AX'-BX'=AX'-B'X'$，所以当X'是AB'和l的交点X时，$AX'-BX'$最大.

75. (a) 第一种解法. 命PXY是内接于$\triangle ABC$的任意三

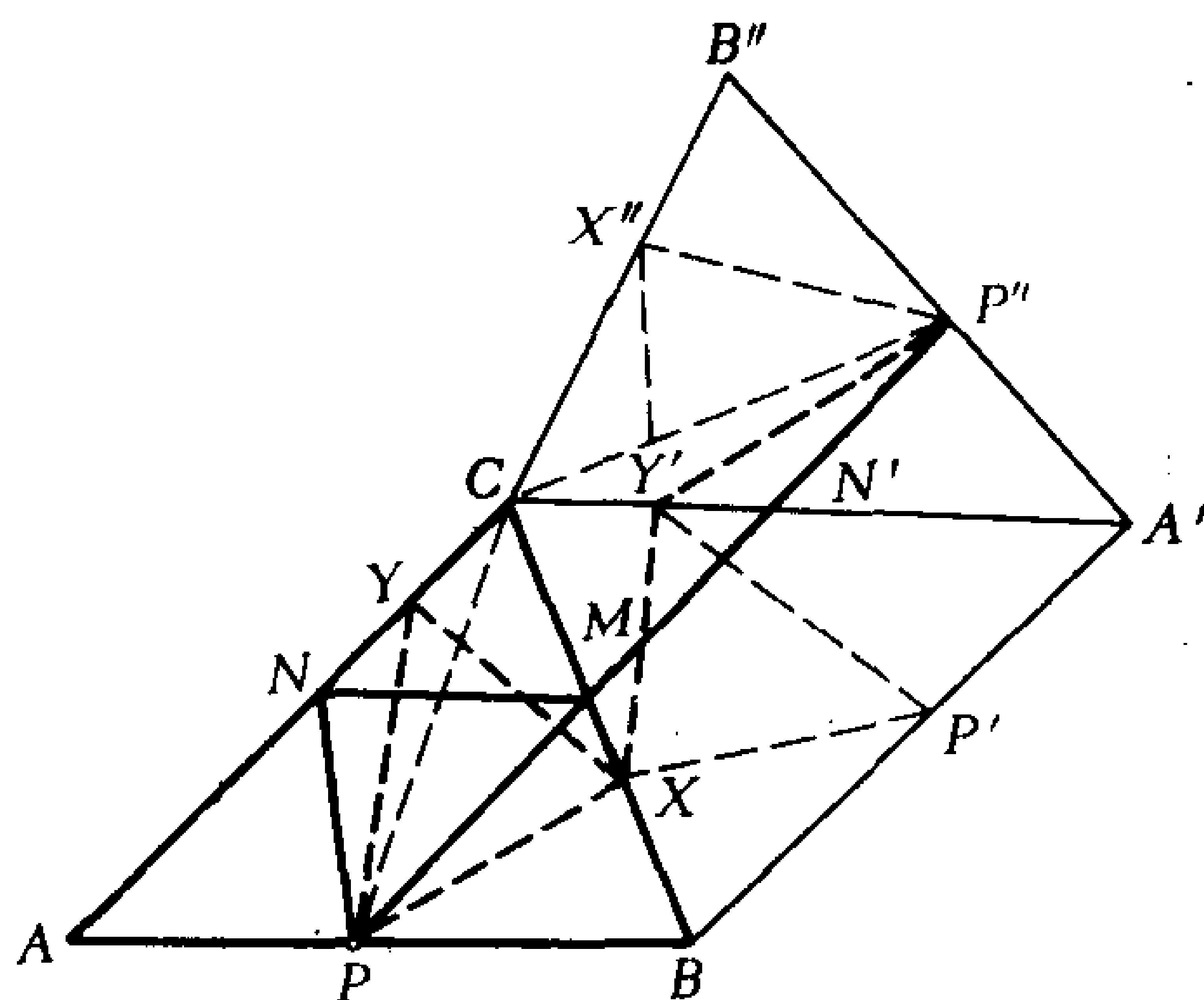


图 143

角形，它的一个顶点是 P. 将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PXY$ 作关于直线 BC 的反射，得到三角形 $A'BC$ 和内接于它的 $\triangle P'XY'$，对所得的三角形再作关于直线 CA' 的反射（图 143）. 用图 143 中的记号，因为 $XY=XY'$，$YP=Y'P''$，所以 $\triangle PXY$ 的周长等于折线 $PXY'P''$ 的长度.

有两种可能的情形. 若线段 PP'' 与直线 BC 的交点在 B 和 C 之间（因而 PP'' 与直线 CA' 的交点在 C 和 A' 之间），则 PP'' 将比任何折线 $PXY'P''$ 短，因而所求的三角形已经找到（即图 143 中的 $\triangle PMN$，其中 M 是 PP'' 与 BC 的交点，N 是点 N' 关于直线 BC 的对称点，而 N' 是 PP'' 与 CA' 的交点）；若线段 PP'' 与直线 BC 交于线段 BC 之外，则最短折线 $PXY'P''$ 是使 X 和 Y' 与 C 重合的那一条折线. 在这种情形下，所求的三角形退化成被描了两次的线段 PC.

剩下还要说明这两种情况中的每一种在什么时候出现. 为此，注意 $\triangle A'B''C$ 是由 $\triangle ABC$ 经过一个绕点 C 转角为 $2\angle C$ 的旋转得到的（因为 $\triangle A'B''C'$ 由 $\triangle ABC$ 连续作关于直线 BC 和 CA' 的两次反射得到，而直线 BC 和 CA' 构成 $\angle C$；见第一册第 43 页，第 II 章 §1 中的命题 3），所以 $\angle PCP''=$

$2\angle C$. 由此立即可知，若$\angle C<90°$，则直线 PP'' 与三角形的边 BC 相交，而若$\angle C\geqslant 90°$，则 PP'' 或与直线 BC 相交在点 C 或与 BC 相交在点 C 一侧的 BC 延长线上的一点.

第二种解法. 仍命 PXY 是内接于$\triangle ABC$ 的任意三角形；命 P' 和 P'' 分别是 P 关于直线 BC 和 CA 的对称点(图 144). 由于 $PX=P'X$，$PY=P''Y$，所以$\triangle PXY$ 的周长等于折线 $P'XYP''$ 的长度. 因而若 $P'P''$ 与$\triangle ABC$ 的两边 AC 和 BC 交于点 M 和 N，则$\triangle PMN$ 即为所求的三角形. 若 $P'P''$ 不与线段 AC 和 BC 相交，则所求三角形退化为被描了两次的线段 PC. 用类似于第一种解法中的方法，可以证明若$\triangle ABC$ 的$\angle C<90°$，则第一种情形成立；若$\angle C\geqslant 90°$，则第二种情形成立.

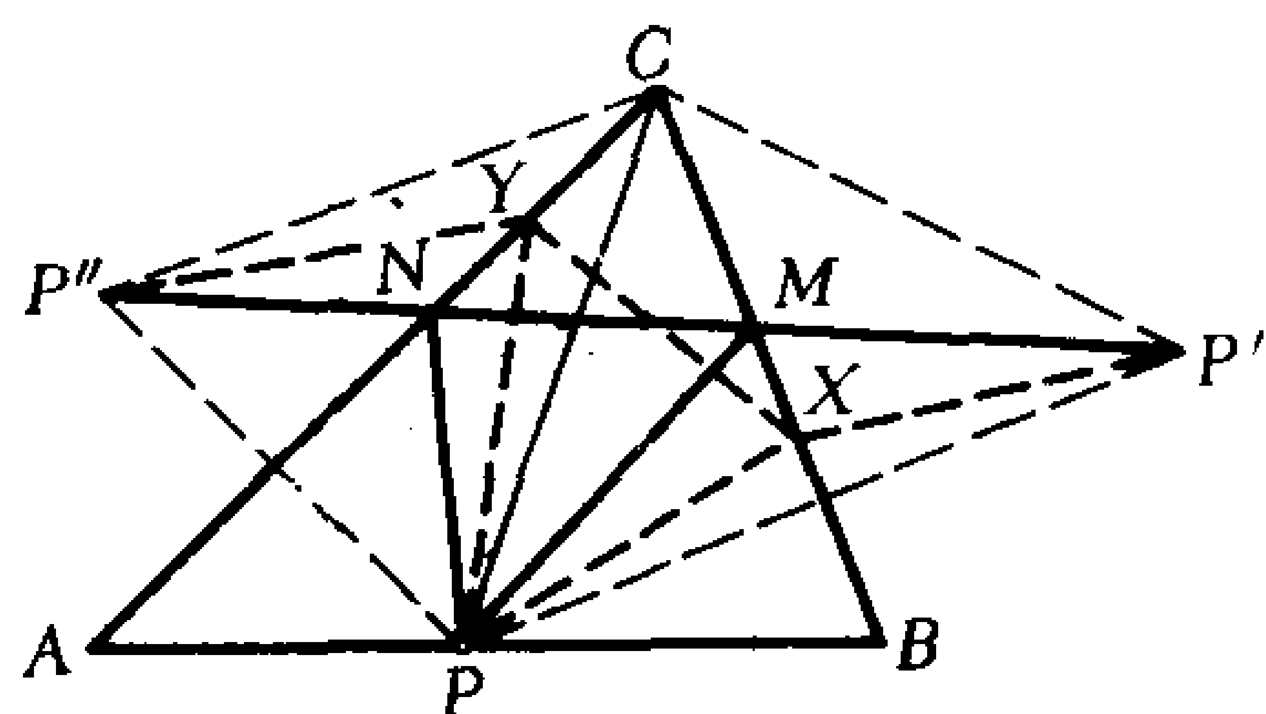


图 144

我们看到，第二种解法与第一种解法本质上没有多大的差别(参看图 143 和 144).

(b) 第一种解法. 我们将假设在给定三角形中，顶点在 C 的角是锐角. 命 P 是 AB 边上任意一点. 用(a)的第一种解法，在$\triangle ABC$ 中作一个内接三角形 PMN，使它的周长，即线段 PP'' 的长度为最小(见图 143). 现在仅剩下选取点 P，使得 PP'' 尽可能地小. 回想 $\angle PCP''=2\angle C$，即它不依赖于点 P 的选取，所以如果边 CP 尽可能地小，则顶角为 $2\angle C$ 的等腰三角形 PCP'' 的底边 PP'' 应为最小. 这时我们必须分别两种情况来考虑.

1° $\triangle ABC$ 中顶点为 A 和 B 的角都是锐角(因而我们的三

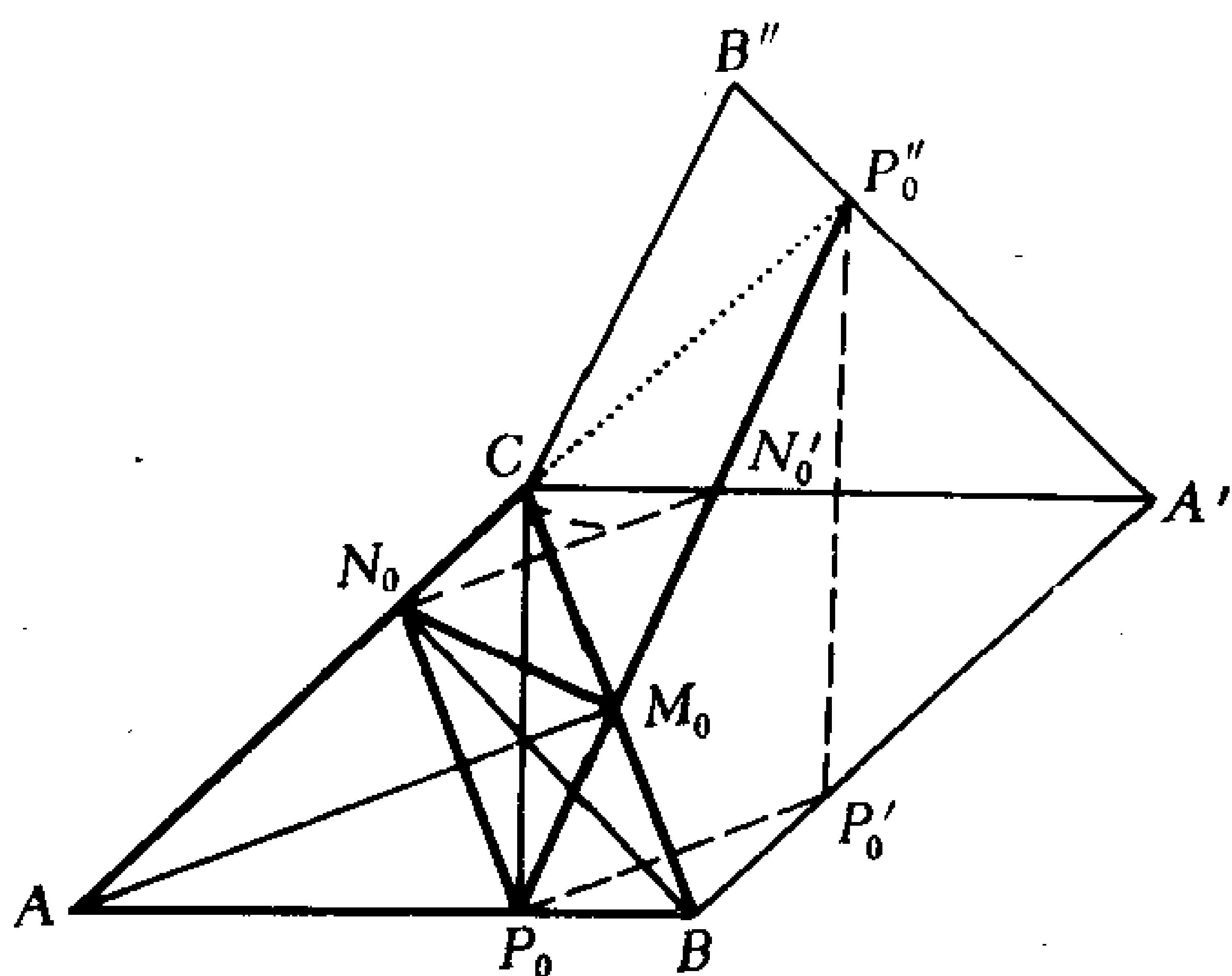


图 145

角形是锐角三角形). 在这种情形，当点 P 是 $\triangle ABC$ 的高 CP_0 的垂足 P_0 时，线段 PC 有最短长度(图 145). 容易证明：由这样选取的 P_0 得到的 $\triangle P_0M_0N_0$ 的顶点 M_0 和 N_0 也是 $\triangle ABC$ 的高的垂足. 事实上，由图 145 可知

$$\angle N_0P_0A = \angle CP_0A - \angle CP_0N_0$$

$$= 90° - \angle CP_0''N_0' = 90° - \frac{180° - 2\angle C}{2},$$

即四边形 BCN_0P_0 内接于圆，因而 $\angle BN_0C = \angle CP_0B = 90°$. 用同样方法可证 $AM_0 \perp BC$.

上面所作的计算已经用到这样的事实：在 $\triangle CP_0P_0''$ 中，$\angle P_0CP_0'' = 2\angle C$，$\angle CP_0P_0'' = \angle CP_0''P_0 = \angle CP_0''N_0'$，所以

$$2\angle CP_0''N_0' = 180° - 2\angle C.$$

给定 $\angle N_0P_0A = \angle C$，为了看出 BCN_0P_0 内接于圆，我们可如下进行：线段 CP_0 分 $\angle C$ 成两部分，命 $\alpha_1 = \angle P_0CN_0$，$\alpha_2 = \angle BCP_0$. 过 P_0 引直线，使与 P_0N_0 成角 α_1，并设这直线交 AN_0 于点 D. 于是 $\angle DP_0A = \alpha_2$（见图 146）. 命 $\beta = \angle CP_0N_0$，于是有 $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 90°$. 命 O 是 BC 的中点. 由于 $\angle CP_0B = 90°$，$\triangle CP_0B$ 的外接圆以 BC 为直径，因而 O 是这个圆的中心. 于是 $OC = OP_0$，因为它们是这个圆的半径. 因此 $\angle OP_0C =$

$\angle OCP_0=\alpha_2$.

现在考虑$\triangle CP_0N_0$的外接圆 S. 我们的目标是证明 S 的中心在 O 点. 因为 $\angle P_0CN_0=\angle DP_0N_0$，可见 P_0D 是 S 的切线. 由 $\alpha_1+\alpha_2+\beta=90°$ 可见 P_0O 与 S 过 P_0 的半径平行. 最后，由 $OP_0=OC$ 且 C 在 S 上，可见 O 必是 S 的中心. 这就是我们要证的.

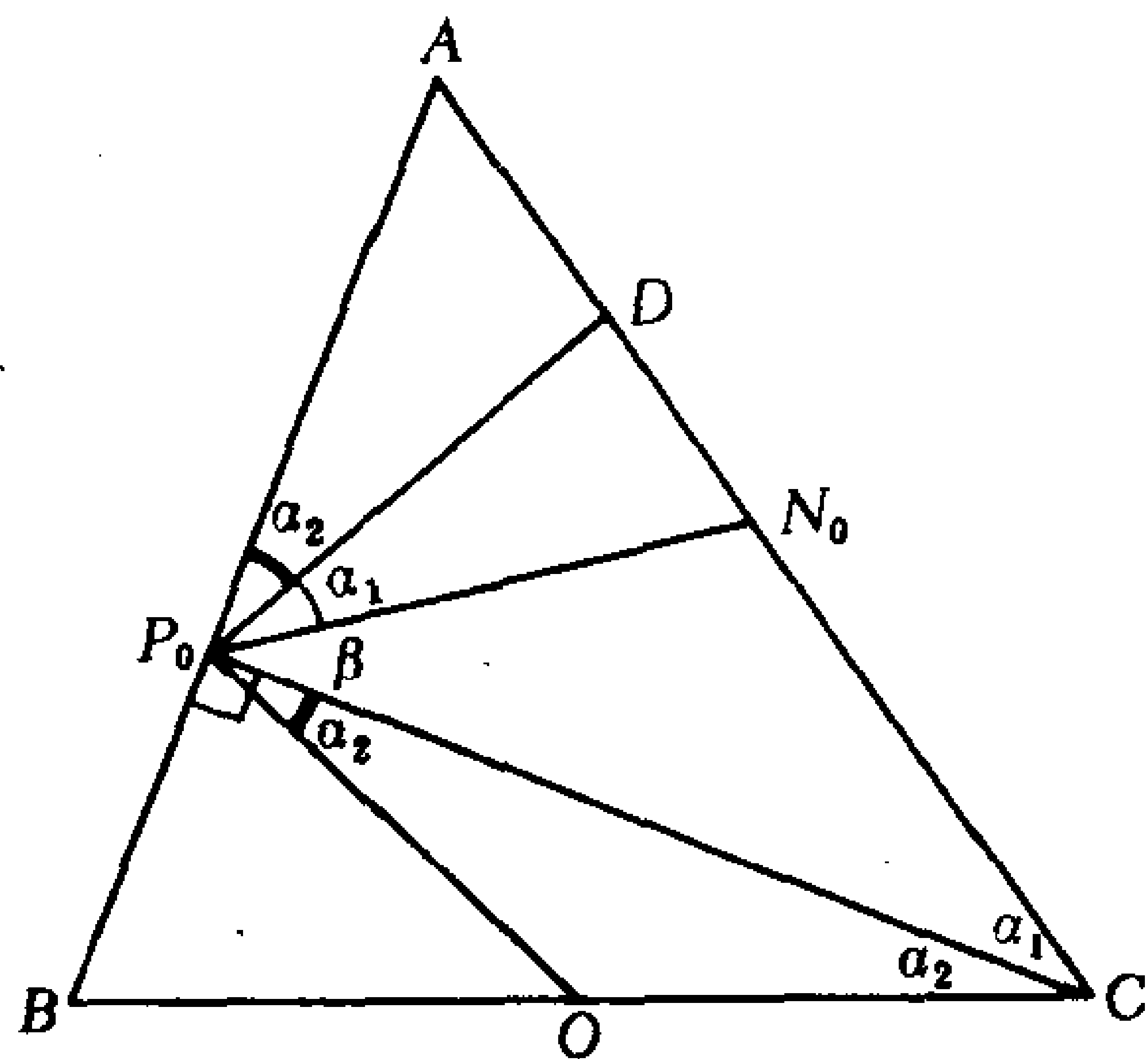


图 146

上面的计算是要证明：当 P_0 如本题解答中那样选取时，M_0和N_0 必然是$\triangle ABC$ 高的垂足. 这一点也可以证明如下：例如，设 N_0 不是 B 向 AC 所作垂线的垂足. 则重复对 P_0 那样的讨论，我们知道，若选取 N 是 B 向 AC 所作垂线的垂足，然后如(a)的解答中一样，作出其余两个顶点 P 和 M，则我们可以得到一个周长更短的内接三角形. 但这是不可能的，因为我们已经知道 P 的最好选取是 P_0（即从 C 向 AB 所作垂线的垂足）.

2° 例如，若 A 是直角或钝角，则当 P 与顶点 A 重合时，线段 CP 为最短. 在这种情形下，所求三角形退化为被描了两次的高 AM_0.

第二种解法. 我们也可以用(a)的第二种解法来解(b). 由于$\triangle MNP$ 的周长（见图 144）等于 $P'P''$，且 $CP'=CP''=CP$，$\angle P'CP''=2\angle C$，本题归结为找一点 P，使得 CP 有最小

值.剩下部分的作法，参看第一种解法.

76. 我们从解一个类似于75(a)的问题开始，即假设点P给定在四边形$ABCD$的边AD上，我们试图去找以P为一个顶点，内接于四边形$ABCD$，并且有最小周长的四边形.这个问题有一个与问题75(a)的第一种解法相类似的解法.将四边形$ABCD$作关于边AB的反射，然后将这样得到的四边形$ABC'D'$作关于BC'的反射，最后把得到的四边形$A'B'C'D''$作关于边$C'D''$的反射，我们得到四边形$C'D''A''B'$〔图147(a)〕.假设在这过程中，任意一个内接四边形$PXYZ$依次变到位置$P'XY'Z'$，$P''X'Y'Z''$和$P'''X''Y''Z''$.四边形$PXYZ$的周长显然等于折线$PXY'Z''P'''$的长度.由此可知，若直线PP'''与我们前面已得到的四边形的边AB，BC'，$C'D''$相交，则交点决定了所求的四边形.若PP'''不与所有这三条线段相交，则所求四边形将是退化的(即或者是一个三角形，它的一个顶点与四边形$ABCD$的顶点之一重合；或者是四边形$ABCD$的一条被描了两次的对角线).

现在回到原问题的解.我们必须在四边形$ABCD$的边AD上找一点P，使得线段PP'''有最短长度，这里P'''是四边形$A''B'C'D''$的边$A''D''$上对应于P的点〔参看问题75(b)的解〕.就象我们在问题75(b)的解答中曾经看到过的那样，若线段AD与$A''D''$不平行，因而没有相同的方向，则所求的点是从线段AD和$A''D''$的旋转中心向直线AD所作垂线的垂足(如果这垂足在线段AD上)；或者所求的点是线段AD的最靠近这垂足的那个端点(若这垂足在线段AD的外边).若线段AD和$A''D''$平行，并且有相同的方向，则从边AD的每个点P到它在线段$A''D''$的对应点P'''的距离是相同的.

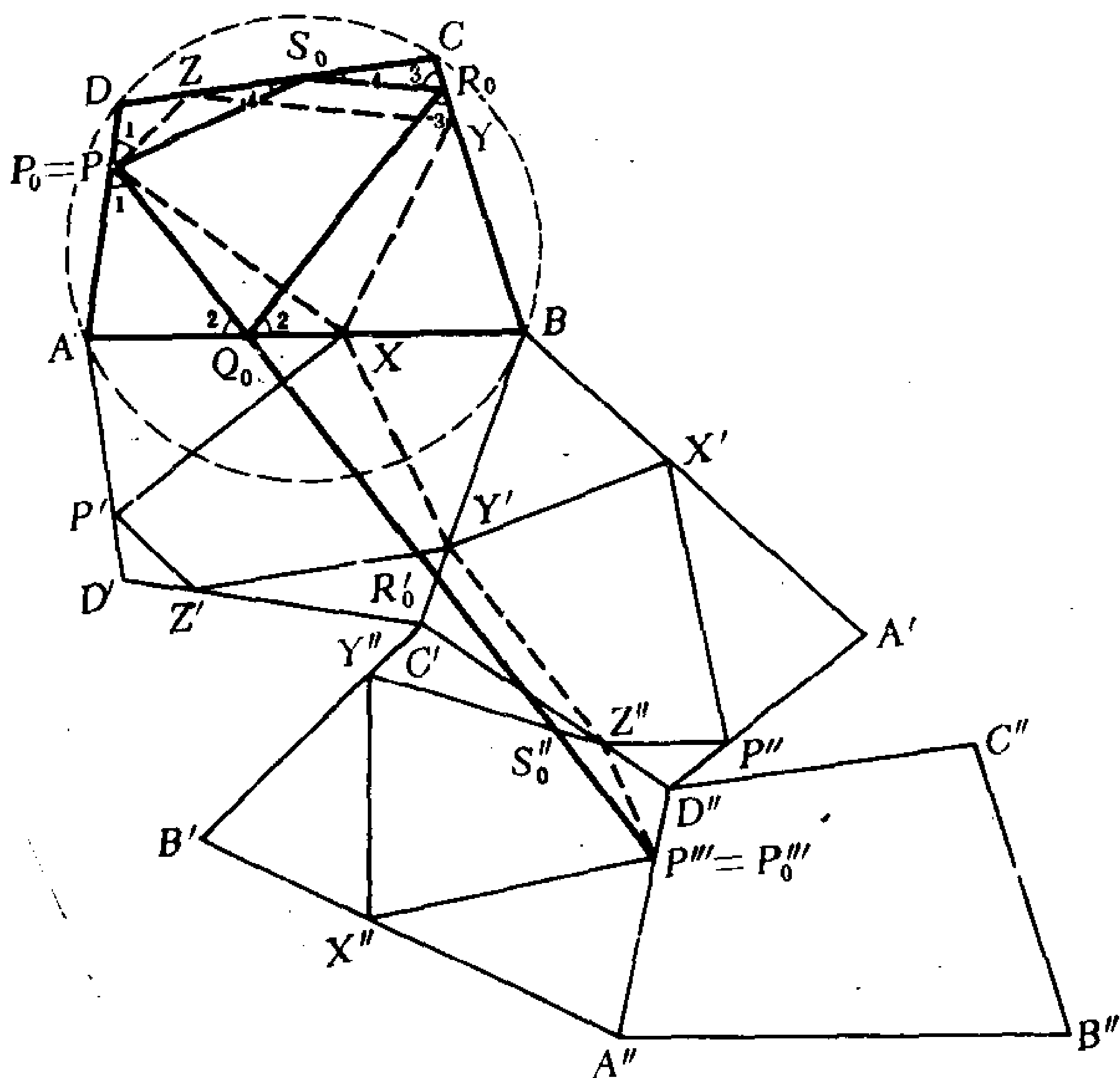


图 147(a)

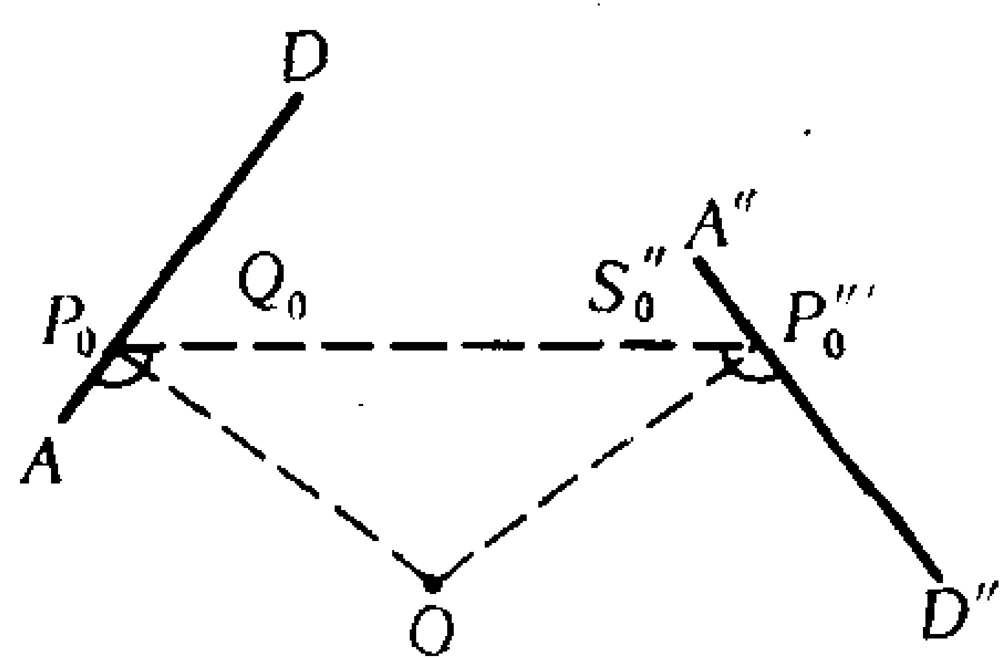


图 147(b)

仅在第一种情形，即从线段 AD 和 $A''D''$ 的旋转中心 O 向直线 AD 所作垂线的垂足 P_0 在边 AD 上，并且直线 P_0P_0''（这里 P_0'' 是从 O 到 $A''D''$ 的垂线的垂足）与三条线段 AB，BC' 和 $C'D''$ 都相交时，本题有正常意义下的（唯一）解. 这时，线段 P_0P_0'' 与线段 AB，BC'，$C'D''$ 的交点确定了所求的四边形 $P_0Q_0R_0S_0$〔见图 147 (a)〕. 而且容易看出

$\angle P_0''P_0A = \angle P_0P_0''D''$〔见图 147(b)〕，由此可知，所求四边形的边 P_0Q_0, P_0S_0 与四边形 $ABCD$ 的边 AD 构成等角. 进一步，由于直线 P_0P_0'' 与直线 AB，BC'，$C'D''$ 构成的对顶角是相等的，可见四边形 $P_0Q_0R_0S_0$ 的边 P_0Q_0, Q_0R_0 与四边形 $ABCD$ 的边 AB 构成等角，边 Q_0R_0, R_0S_0 与边 BC 构成等角，以及边 R_0S_0, S_0P_0 与边 CD 构成等角①. 其次，用图 147(a)中的记号，我们有

$$\angle A + \angle C = (180° - \angle 1 - \angle 2) + (180° - \angle 3 - \angle 4)$$
$$= 360° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4),$$
$$\angle B + \angle D = (180° - \angle 2 - \angle 3) + (180° - \angle 4 - \angle 1)$$
$$= 360° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4),$$
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$

因此，仅当四边形 $ABCD$ 可内接于圆时，本题有一个正常意义下的解.

现在设四边形 $ABCD$ 可内接于圆（即 $\angle B + \angle D = 180°$）. 命 $D''A''B''C''$ 是 $D''A''B'C'$ 关于直线 $D''A''$ 的反射象. 因为四边形 $BC'D''A'$ 是由 $ABCD$ 经过绕 B 点，转角为 $2\angle B$ 的旋转得到的〔参看问题 75 (a) 的解〕，而 $D''A''B''C''$ 是由 $D''A'BC'$ 经过绕 D'' 点，转角为 $2\angle D$ 的旋转得到的，又 $2\angle B + 2\angle D = 360°$，可见 $A''B''C''D''$ 是由 $ABCD$ 经过平移得到的（见第一册第一章 § 2）. 所以，若 $ABCD$ 可内接于圆，则线段 $A''D''$ 平行于 AD 并且与 AD 同向. 这样，AD 上任意一点 P 和它在 $A''D''$ 的对应点 P''' 间的距离不依赖于 P 的位置，因而我

---

① 这样我们就证明了：若 $PQRS$ 是内接于 $ABCD$ 并有极小周长的四边形，则它的任意两个相邻边和 $ABCD$ 中与它们相交的边构成等角. 这个命题可以更简单地证明. 事实上，若 $\angle SPD = \angle QPA$，则我们可以改变 P 的位置而不改变顶点 Q, R, S 的位置，使得四边形 $PQRS$ 的周长变得更小〔见问题 74(a)的解〕.

们的问题有无穷多个解，它们对应于所有那些使得线段 PP''' 与 AB, BC' , $C'D'$ 都相交的点 P 的位置. 显然，所有这些内接于四边形 $ABCD$ 且有极小周长的四边形的边彼此是平行的(见图 148).

77. 若 D, E, F 是$\triangle ABC$ 的高的垂足，则$\triangle ACD\sim\triangle BCE$ (见图 149). 所以 $CE/CD=CB/CA$. 因此，$\triangle ABC\sim\triangle DEC$. 于是，$\angle CED=\angle CBA$. 命 MN 是$\triangle ABC$ 的外接圆在点 C 处的切线. 显然，$\angle MCA=\angle CBA(=\overset{\frown}{AC}/2)$. 于是有 $\angle MCE=\angle CED$，即 $ED/\!/MN\perp OC$. 同理可证 $EF\perp OA$, $DF\perp OB$，这证明$\triangle DEF$ 就是所要求的三角形. (容易看出，没有其它内接于$\triangle ABC$ 的三角形是本题的解，因为没有其它内接于$\triangle ABC$ 的三角形，它的边是与$\triangle DEF$ 的边平行的.)

若$\triangle ABC$ 是锐角三角形，则外接圆心落在$\triangle ABC$ 的内部(图 149)，所以有

面积($\triangle ABC$) = 面积($ODCE$) + 面积($OEAF$) + 面积($OFBD$).

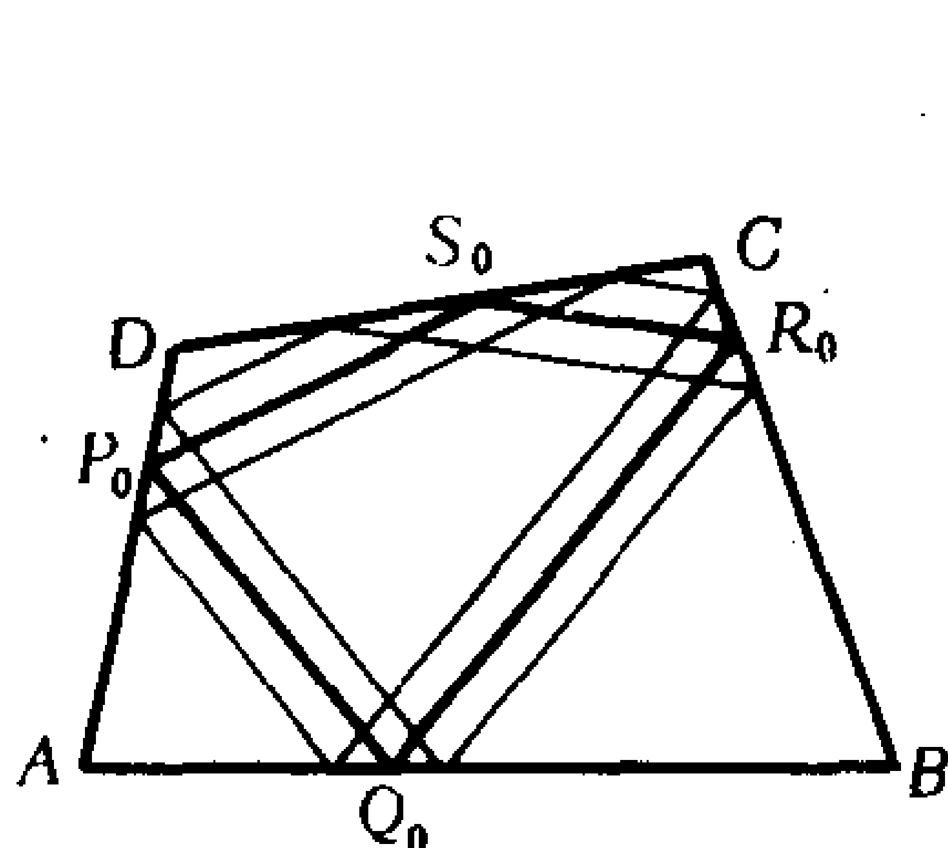


图 148

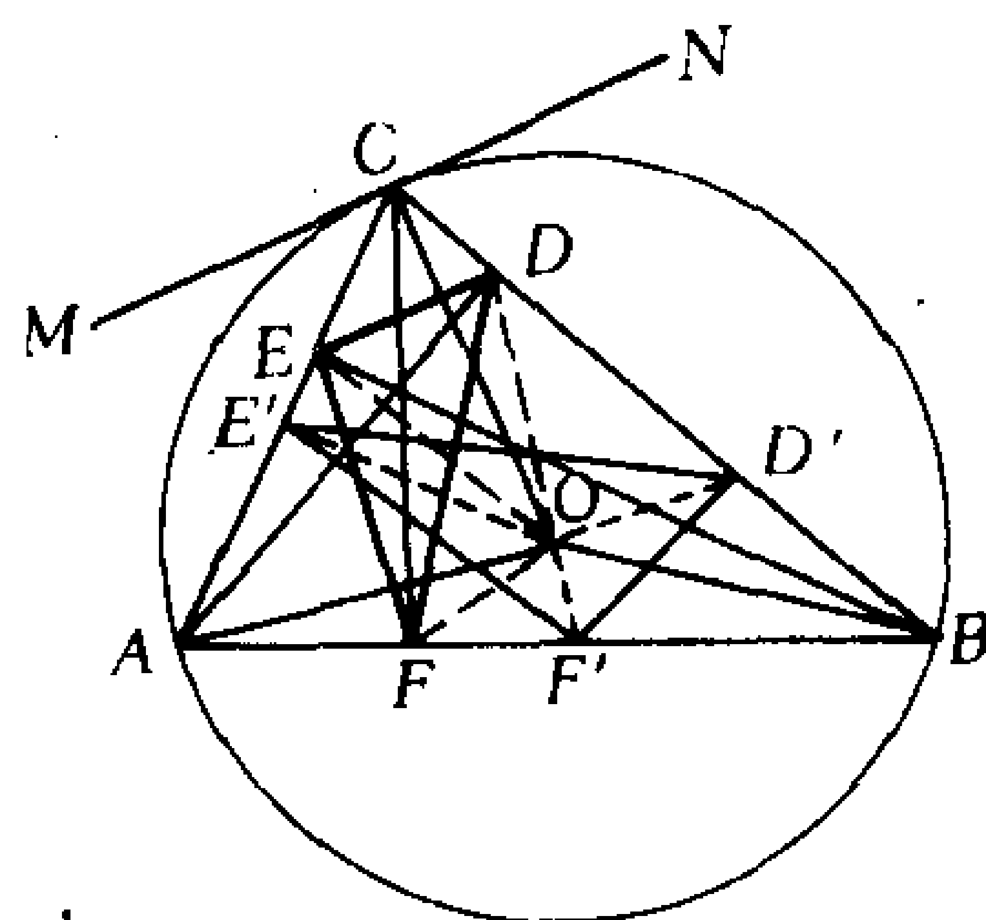


图 149

但在等式右边的三个四边形中，每一个的对角线都是相互垂

直的，所以它们的面积都等于它们的对角线乘积的一半. 于是有

$$(*)\ 面积(\triangle ABC)=\frac{1}{2}OC\cdot DE+\frac{1}{2}OA\cdot EF+\frac{1}{2}OB\cdot FD$$
$$=\frac{1}{2}R(DE+EF+FD),$$

这里 R 是外接圆半径.

若 $F'D'E'$ 是任一内接于 $\triangle ABC$ 的三角形，则

$$面积(\triangle ABC)=面积(OD'CE')+面积(OE'AF')+面积(OF'BD')$$
$$=\frac{1}{2}OC\cdot D'E'\sin\gamma+\frac{1}{2}OA\cdot E'F'\sin\alpha+\frac{1}{2}OB\cdot F'D'\sin\beta,$$

这里 γ, α, β 分别是四边形 $OD'CE'$, $OE'AF'$, $OF'BD'$ 的对角线的夹角. 所以

$$面积(\triangle ABC)\leqslant\frac{1}{2}R(D'E'+E'F'+F'D').$$

把这等式与上面的(*)加以比较，我们得到

$$DE+EF+FD\leqslant D'E'+E'F'+F'D'.$$

因此，在内接于给定的锐角三角形的所有三角形中，有最小周长的是以给定三角形的高的垂足为顶点的三角形.

78. 我们先找一点，使它到顶点 A,B,C 的距离与数 a,b,c 成比例. 如果我们用与两个给定点距离之比有给定值的点的轨迹是圆这个事实(见第 42 页的注)，这样的点是容易作出的. 此外，可以证明，一般说来有两个这样的点，一个在给定三角形外接圆的外面，一个在它的里面. 所以这两点之一必定落在 $\triangle ABC$ 之外. 现在我们必须考虑两种情形.

1° 所作出的点之一(我们用 O 表示)在$\triangle ABC$之内(图 150). 在三角形 ABC 中作一内接三角形 DEF,使它的边分别垂直于线段 OA, OB 和 OC〔见问题 9(b)〕. 显然,我们有

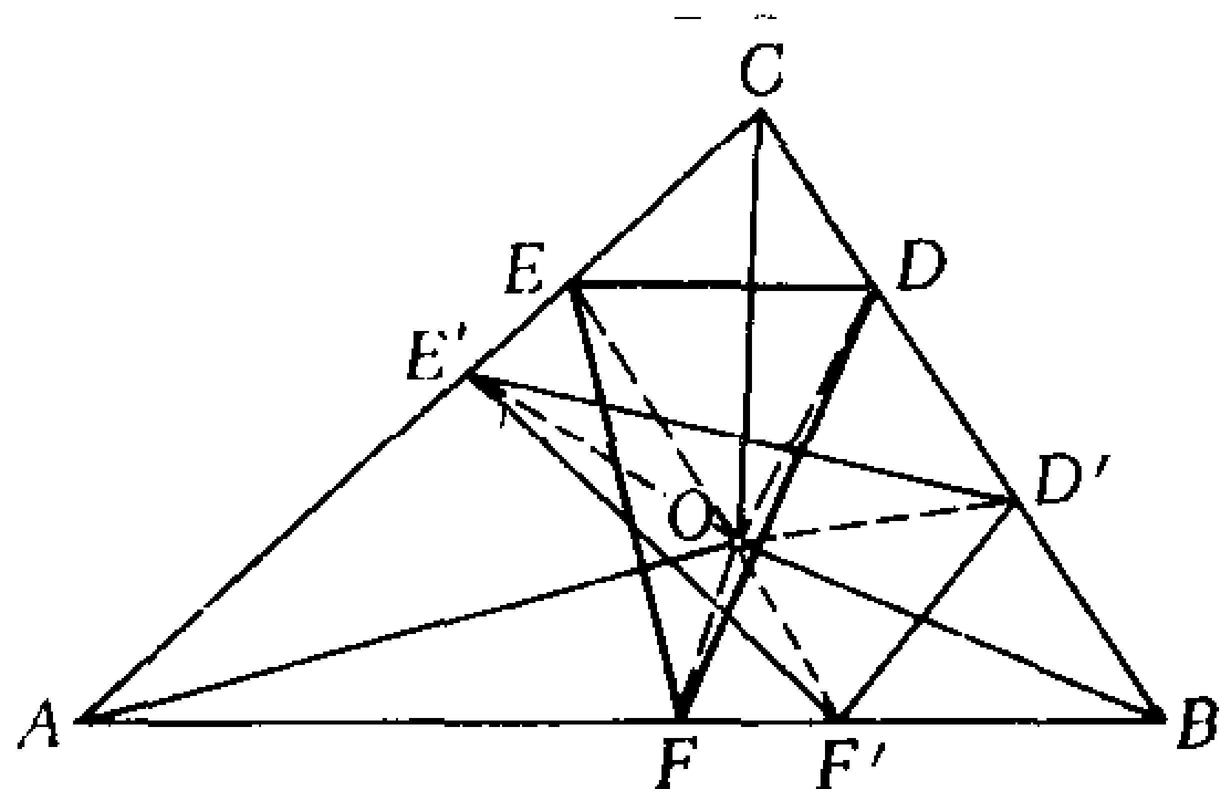


图 150

$$面积(\triangle ABC)=面积(OEAF)+面积(OFBD)+面积(ODCE).$$

由于 $OA\perp EF, OB\perp FD, OC\perp DE$ 和 $OA=ak, OB=bk, OC=ck$(对某个数 k),我们有

$$(*)\quad 面积(\triangle ABC)=\frac{1}{2}OA\cdot EF+\frac{1}{2}OB\cdot FD+\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

$$=\frac{1}{2}k(a\cdot EF+b\cdot FD+c\cdot DE).$$

现命 $D'E'F'$ 是内接于$\triangle ABC$的任意一个三角形,并且命 α, β, γ 分别是四边形 $OE'AF'$, $OF'BD'$, $OD'CE'$ 的对角线的夹角. 这时有(参看问题 77 的解)

$$面积(\triangle ABC)=\frac{1}{2}OA\cdot E'F'\sin\alpha+\frac{1}{2}OB\cdot F'D'\sin\beta+\frac{1}{2}OC\cdot D'E'\sin\gamma$$

$$\leqslant\frac{1}{2}k(a\cdot E'F'+b\cdot F'D'+c\cdot D'E'),$$

所以

$$a\cdot EF+b\cdot FD+c\cdot DE\leqslant a\cdot E'F'+b\cdot F'D'+c\cdot D'E',$$

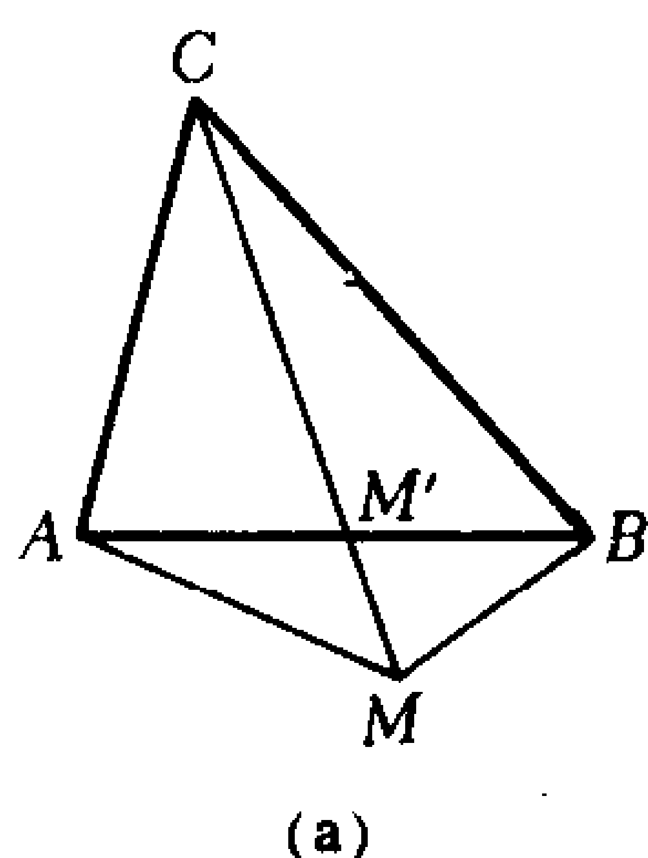
即$\triangle DEF$就是所要求的三角形.

2° 例如，若点 O 在$\triangle ABC$ 的边 AB 上，则所求三角形退化成被描了两次的$\triangle ABC$ 的 AB 边上的高；若 O 在$\triangle ABC$ 之外，则所求三角形退化成$\triangle ABC$ 中把 O 与$\triangle ABC$ 分隔开的那条边上的高，并且它也是被描了两次. 我们把这些证明留给读者①.

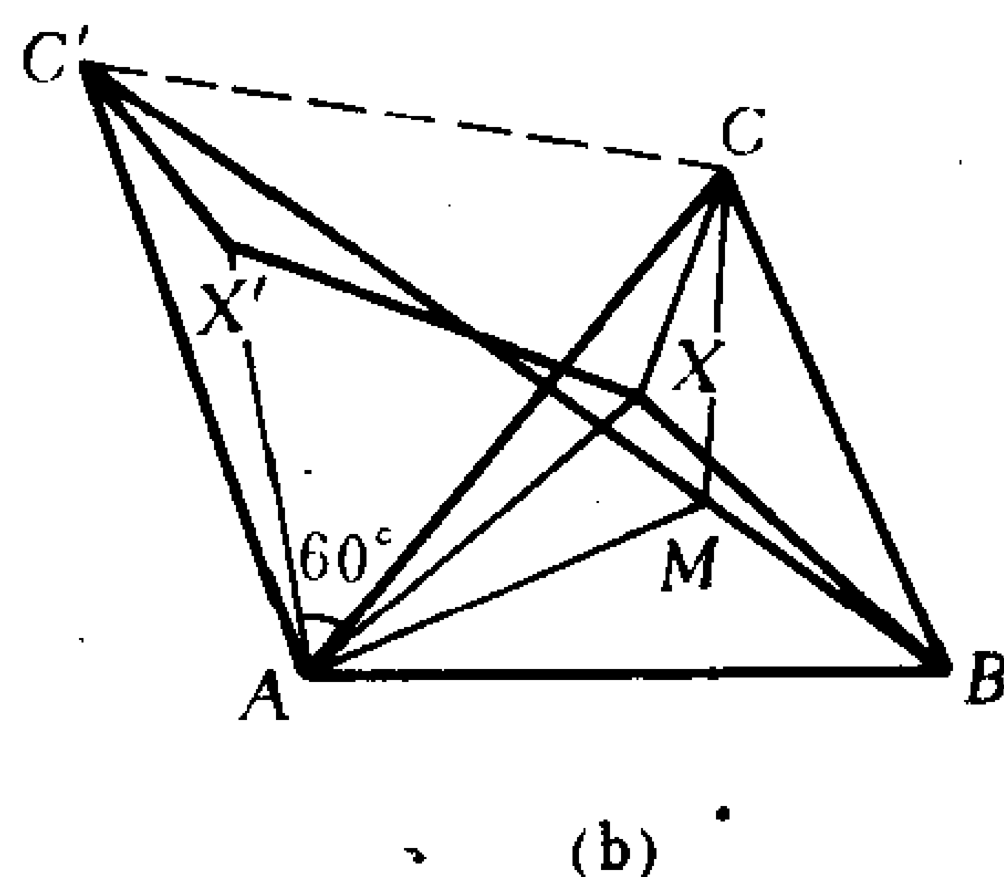
79. 所求的点 M 不能在$\triangle ABC$ 之外，否则我们容易找到一点 M'，使得

$$AM' + BM' + CM' < AM + BM + CM$$

〔图 151 (a)〕. 现在命 X 是$\triangle ABC$ 内任意一点〔图 151 (b)〕. 把$\triangle ACX$ 按从 B 到 C 的方向绕 A 旋转一个 60°角，到达一个新的位置 $AC'X'$. 由于 $AX = XX'$（因$\triangle AXX'$ 是等边三角形）和 $CX = C'X'$，我们知道从点 X 到三角形各顶点的距离之和等于折线 $BXX'C'$ 的长度. 现在只剩下选取点 M，使得折线 $BMM'C'$ 有最短的长度.



(a)



(b)

图 151

我们分两种情形考虑：

---

① 平面上每条直线把平面分成两个半平面，在不同半平面上的点称为被这直线彼此分隔开. 在给定三角形之外的点与三角形内的点由三角形的至少一条，至多两条边（无限延长）分隔开. 可以证明，在我们的情况下，只有$\triangle ABC$ 的一条边把点 O 与$\triangle ABC$ 分隔开.

1° 线段 $C'B$ 与 $\triangle ABC$ 的 AC 边相交；当 $\angle BCC' < 180°$，$\angle BAC' < 180°$ 或当 $\triangle ABC$ 的角 C 和 A 都小于 120°时出现这种情况（后者是因为

$$\angle BCC' = \angle BCA + \angle ACC' = \angle BCA + 60°$$

和

$$\angle BAC' = \angle BAC + \angle CAC' = \angle BAC + 60°).$$

这时如果能够在线段 $C'B$ 上找到一个点 M，使得 $\angle AMC' = 60°$，则对这个点我们就有

$$AM + MC + MB = C'B,$$

因而它就是所求的点．对于这个点 M，我们有 $\angle AMB = \angle CMB = \angle AMC = 120°$（即 M 是这样的点，从它看三角形各条边的视角都相等）．显然，为了使得在线段 $C'B$ 上确实有这样的点 M，必须 $\angle CBA < 120°$．若 $\angle CBA \geqslant 120°$，则所求的点是 $\triangle ABC$ 的顶点 B．

2° 线段 $C'B$ 不与 $\triangle ABC$ 的 AC 边相交；例如，点 C' 与三角形 ABC 在直线 BC 的两侧（$\angle C \geqslant 120°$）．在这种情形下，最短折线 $C'X'XB$ 是折线 $C'CB$，所求的点就是 $\triangle ABC$ 的顶点 C．同样，若 $\angle A \geqslant 120°$，所求的点就是 $\triangle ABC$ 的顶点 A．

80．(a) 若 DEF 是 $\triangle ABC$ 的外接等边三角形，并且 AM，BM，CM 分别垂直于 $\triangle DEF$ 的各条边，则显然有 $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$〔图 152 (a)〕．由此可见 M 是以 $\triangle ABC$ 的三条边为弦，所含圆周角为 120°的三个圆弧的交点．在找到了 M 之后，我们就不难作出 $\triangle DEF$．若 $\triangle ABC$ 的角都不超过 120°，则点 M 在 $\triangle ABC$ 内；否则，例如若 $\angle C = 120°$，则 $M = C$；若 $\angle C > 120°$，则 M 在 $\triangle ABC$ 之外．现在，我们用它来导出问题 79 的解．

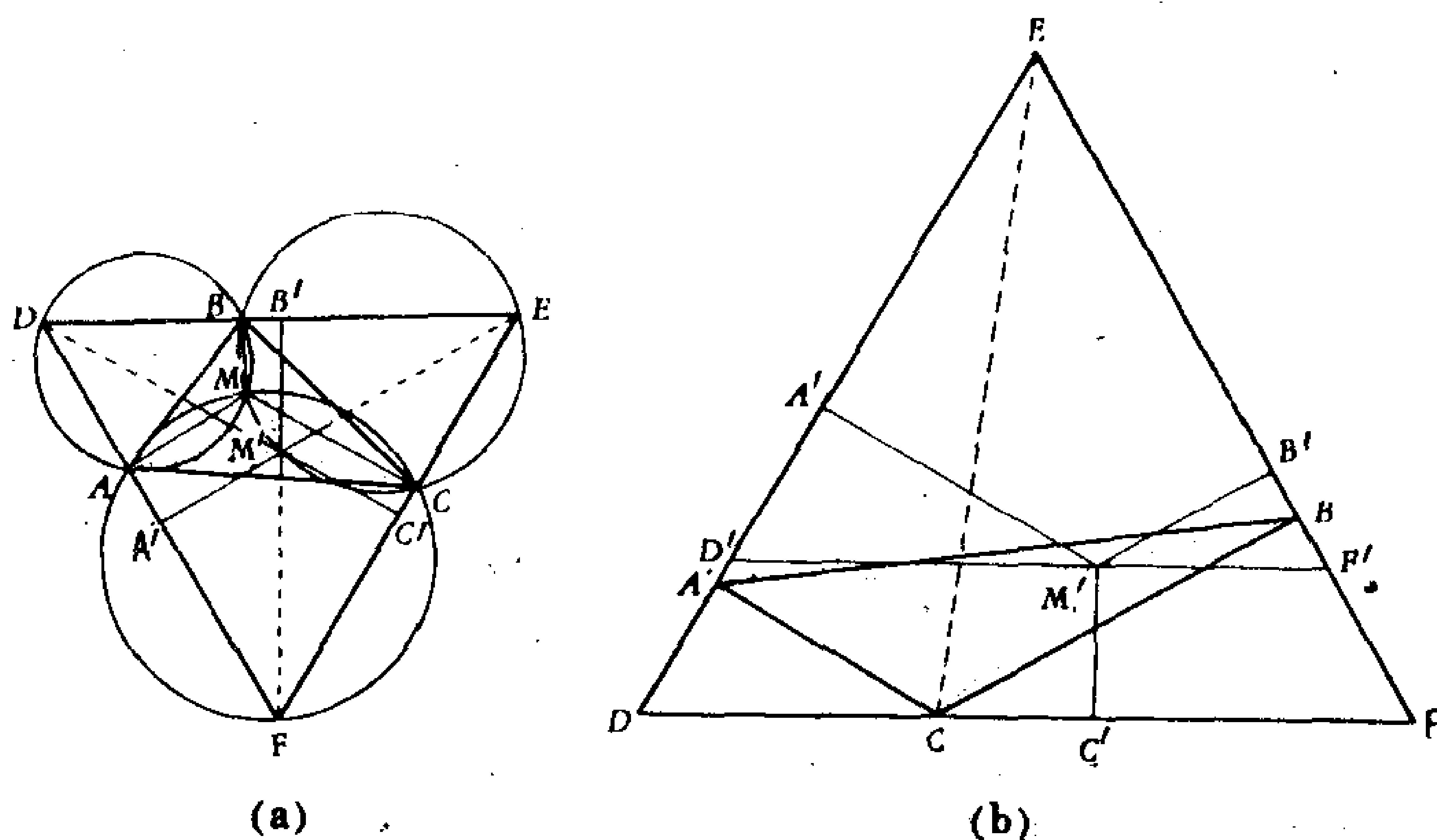


图 152

考虑第一种情况．设 M' 是$\triangle ABC$ 的任意一个内点，并命 $M'A'$，$M'B'$，$M'C'$ 是从 M' 向$\triangle DEF$ 各边所作的垂线．我们有

$$\text{面积}(\triangle DEF) = \text{面积}(\triangle DEM') + \text{面积}(\triangle EFM') + \text{面积}(\triangle FDM')；$$

或者，若用 a 和 h 分别表示等边三角形 DEF 的边和高，则有

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot M'A' + \frac{1}{2}a \cdot M'B' + \frac{1}{2}a \cdot M'C',$$

即

$$M'A' + M'B' + M'C' = h.$$

但是 $M'A \geqslant M'A'$，$M'B \geqslant M'B'$，$M'C \geqslant M'C'$（因为垂直距离是最短的），所以有

$$M'A + M'B + M'C \geqslant h,$$

并且等式仅当 M' 与 M 重合时成立．因此，M 就是所求的点．

若 $M=C$，则 C 是所求的点．最后，若$\angle C>120°$，则仍然有顶点 C 到三角形的其它两个顶点距离之和小于任一其它

的点到三角形各顶点距离之和. 为证明这一点，作$\triangle ABC$的一外接等腰三角形DEF，使得$CA\perp DE$，$CB\perp EF$〔图152(b)〕. 设M'是$\triangle ABC$内任意一点. 命A'，B'，C'是从M'向$\triangle DEF$各边所作垂线的垂足. $\triangle D'EF'$是相似于$\triangle DEF$的，并且它的边$D'F'$过M'. 我们有

$$\text{面积}(\triangle DEF)=\text{面积}(\triangle CDE)+\text{面积}(\triangle CEF).$$

所以

$$CA+CB=h,$$

其中h是$\triangle DEF$的腰上的高. 类似地我们得到

$$M'A'+M'B'=h',$$

其中$h'=kh$是$\triangle D'EF'$的腰上的高(k是相似系数，$k<1$).

用H和$H'=kH$分别表示$\triangle DEF$和$\triangle D'EF'$底边上的高. 由于$\angle E=180^\circ-\angle C<60^\circ$，我们有$DF<DE$，$H>h$. 所以

$$M'A'+M'B'+M'C'=h'+(H-H')=H-(H'-h')$$
$$=H-k(H-h)>H-(H-h)=h=CA+CB.$$

显然，我们有

$$M'A'+M'B'+M'C'\leqslant M'A+M'B+M'C,$$

因而

$$M'A+M'B+M'C>CA+CB,$$

这就是所要证的.

(b) 若AM，BM，CM分别与$\triangle ABC$的内接等边三角形DEF的各边垂直，则显然有

$$\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120^\circ$$

(见图153). 所以，为解本题，我们必须找一点M，使得从它看三角形ABC的各个边都有120°的视角. 然后在$\triangle ABC$中作内接三角形DEF，使得它的边分别垂直于AM，BM，CM〔见问题

9 (b)〕. 若$\triangle ABC$的各个角都小于 120°，$\triangle DEF$的顶点将落在$\triangle ABC$的各边上而不在它们的延长线上. 假定是这种情形，则有

$$\begin{aligned}\text{面积}(\triangle ABC) &= \text{面积}(MDCE)+\text{面积}(MEAF)\\ &\quad+\text{面积}(MFBD)\\ &=\frac{1}{2}DE\cdot MC+\frac{1}{2}EF\cdot MA+\frac{1}{2}FD\cdot MB\\ &=\frac{1}{2}DE(MA+MB+MC).\end{aligned}$$

现在假设M'是$\triangle ABC$内任意一点；并命α，β，γ分别是直线$M'A$，$M'B$，$M'C$与$\triangle DEF$中相应的边的交角. 则有

$$\begin{aligned}&\text{面积}(\triangle ABC)\\ &=\text{面积}(M'DCE)+\text{面积}(M'EAF)+\text{面积}(M'FBD)\\ &=\frac{1}{2}DE\cdot M'C\sin\gamma+\frac{1}{2}EF\cdot M'A\sin\alpha+\frac{1}{2}FD\cdot M'B\sin\beta\\ &\leqslant\frac{1}{2}DE(M'A+M'B+M'C).\end{aligned}$$

由此我们有

$$MA+MB+MC\leqslant M'A+M'B+M'C,$$

这正是我们要证的(参看问题 77 的解).

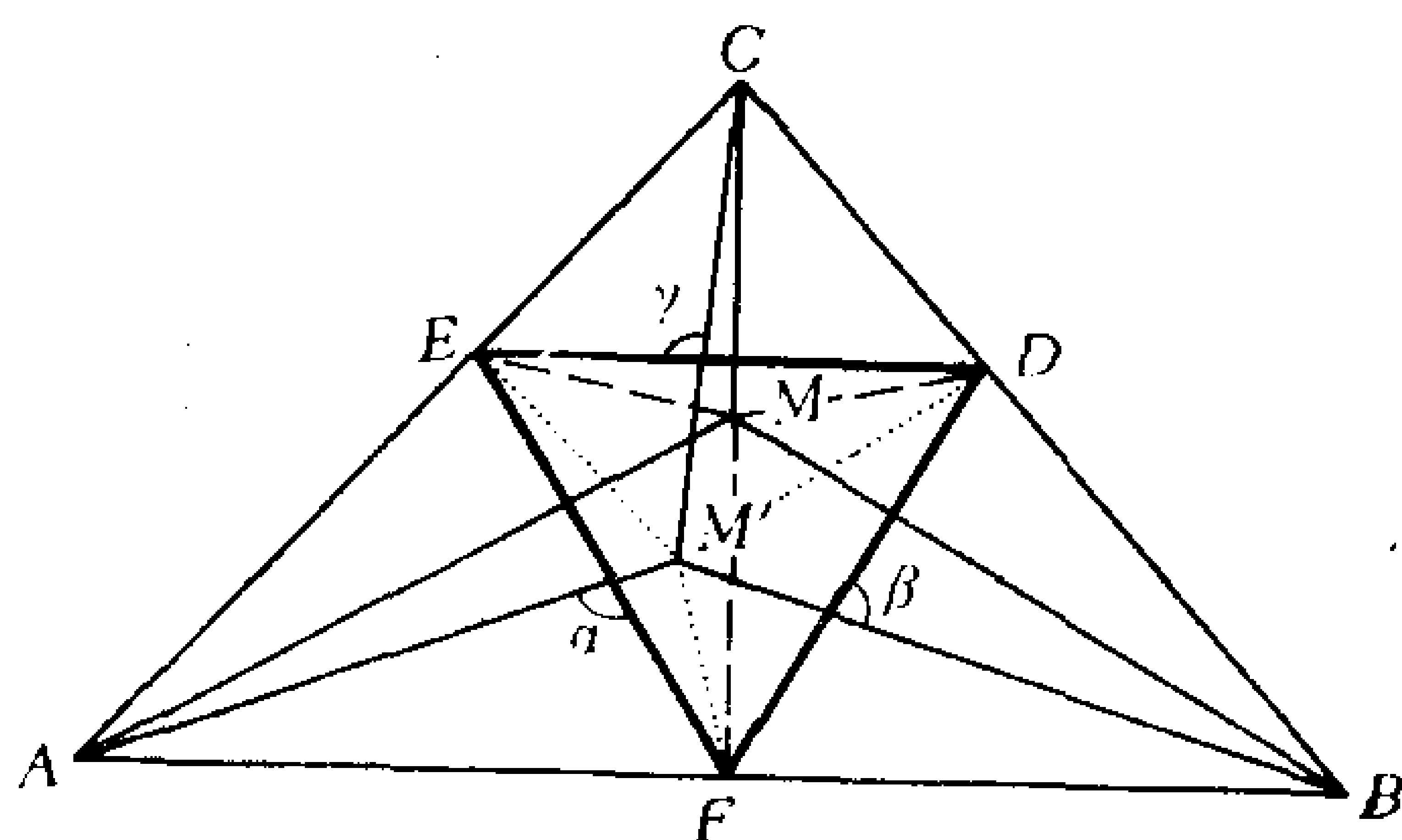


图 153

81. (a) 第一种解法. 把$\triangle CAM$绕点A旋转 60°到ABM'的位置〔图 154 (a)〕. 于是有$MM'=AM'=AM$，$CM=BM'$. 但

是 $BM \leqslant BM' + MM'$，所以有

$$BM \leqslant AM + CM.$$

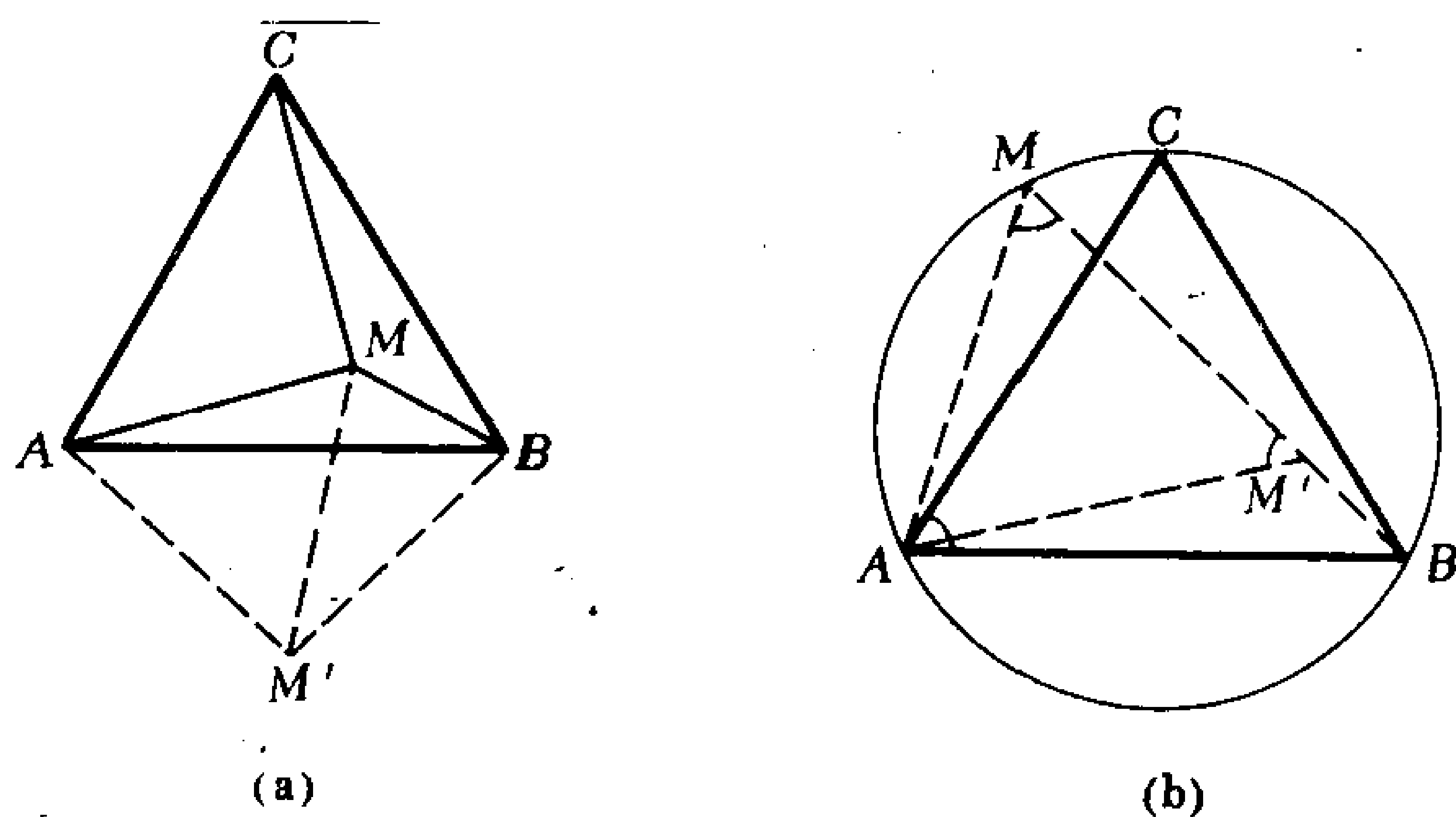


图 154

而且仅当 M' 在线段 BM 上时有 $BM = BM' + MM'$. 因为 $\angle AMM' = 60°$，我们有 $\angle AMB = 60°$. 这意味着 M 落在 $\triangle ABC$ 的外接圆的弧 AC 上〔见图 154(b)〕.

第二种解法. 过点 M 引直线 MP，MQ，MR 分别平行于 $\triangle ABC$ 的边 AC，AB，BC〔图 155 (a)〕. 容易看出，四边形 $MQAR$，$MPBR$，$MPCQ$ 是等腰梯形，因而 $MA = QR$，$MB = PR$，$MC = PQ$. 于是线段 MA，MB，MC 与 $\triangle PQR$ 的各边有相同的长度，所以有 $MA + MC \geqslant MB$. 仅当 $RQ + QP = PR$，即 Q 在线段 PR 上时，等式 $MA + MC = MB$ 成立〔图 155 (b)〕. 这时有 $\angle RMA = \angle RQA$，$\angle PMC = \angle PQC$，$\angle RQA = \angle PQC$，即有 $\angle RMA = \angle CMP$，$\angle AMC = \angle RMP = 120°$，所以 M 在 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 AC 上.

第三种解法. 从 M 向 $\triangle ABC$ 的各边作垂线 MA_1，MB_1，MC_1〔图 156 (a)〕. 以 AM 为直径的圆是四边形 AC_1MB_1 的外

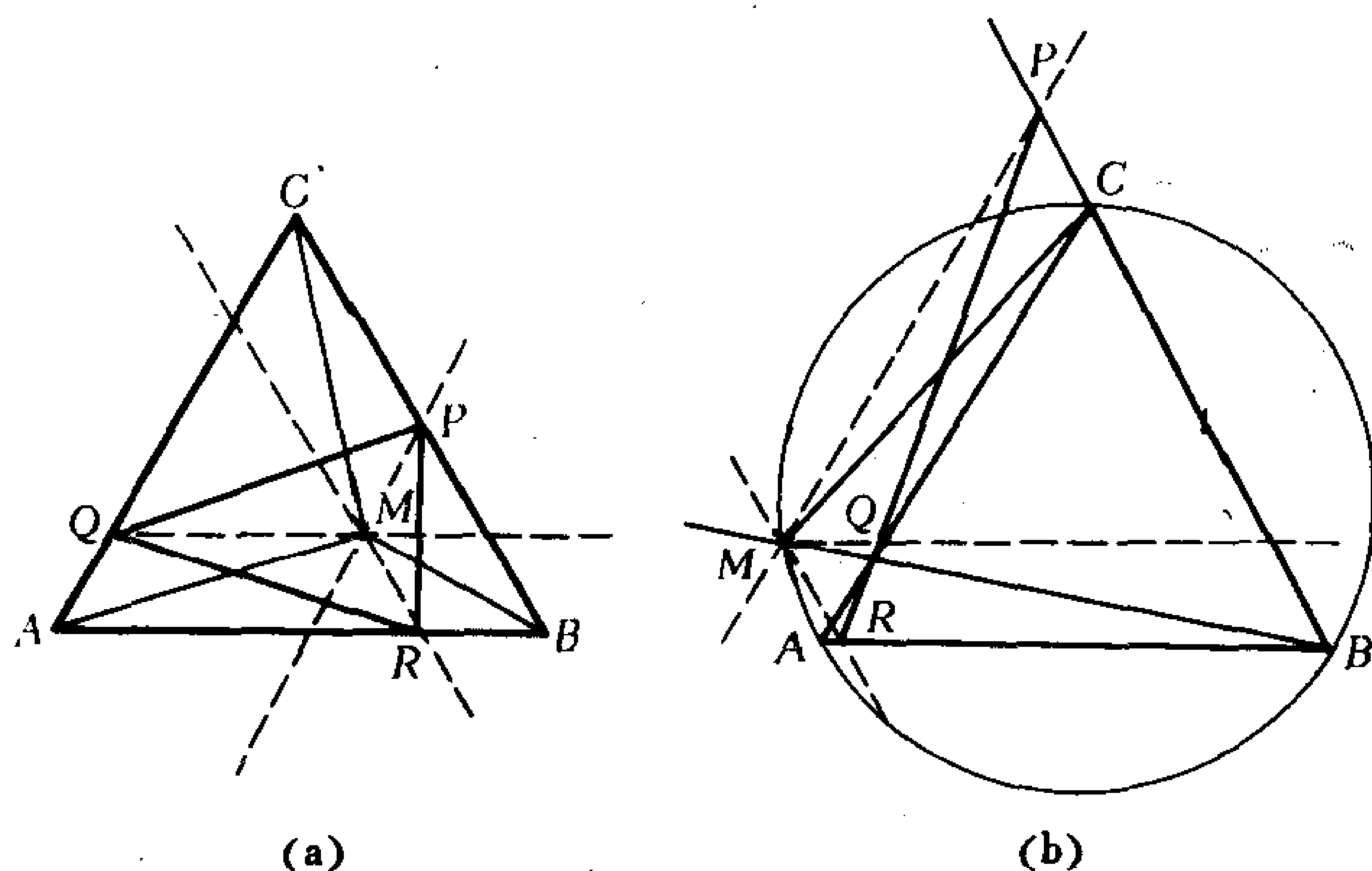


图 155

接圆. 因为 $\angle B_1AC_1=60^\circ$，可见 B_1C_1 是内接于这圆的某个等边三角形的边. 所以 $B_1C_1=(\sqrt{3}/2)MA$. 类似地有 $A_1B_1=(\sqrt{3}/2)MC$, $A_1C_1=(\sqrt{3}/2)MB$. 但是在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中我们有

$$A_1C_1\leqslant A_1B_1+B_1C_1\ ,$$

由此即得

$$MB\leqslant MA+MC.$$

此外，若点 A_1,B_1,C_1 在一条直线上，且 B_1 在 A_1 和 C_1 之间〔图 156 (b)〕，则有 $MB=MA+MC$. 我们断言这时 M 在 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 AC 上. 事实上，$\angle C_1MA=\angle C_1B_1A$, $\angle A_1MC=\angle A_1B_1C$，但是，由于在这种情况下，$\angle C_1B_1A=\angle A_1B_1C$，于是我们有 $\angle C_1MA=\angle A_1MC$，因而 $\angle AMC=\angle C_1MA_1=120^\circ$，这就证明了我们的断言.

我们注意，一般说来，从任意一点 M 向任意一个三角形

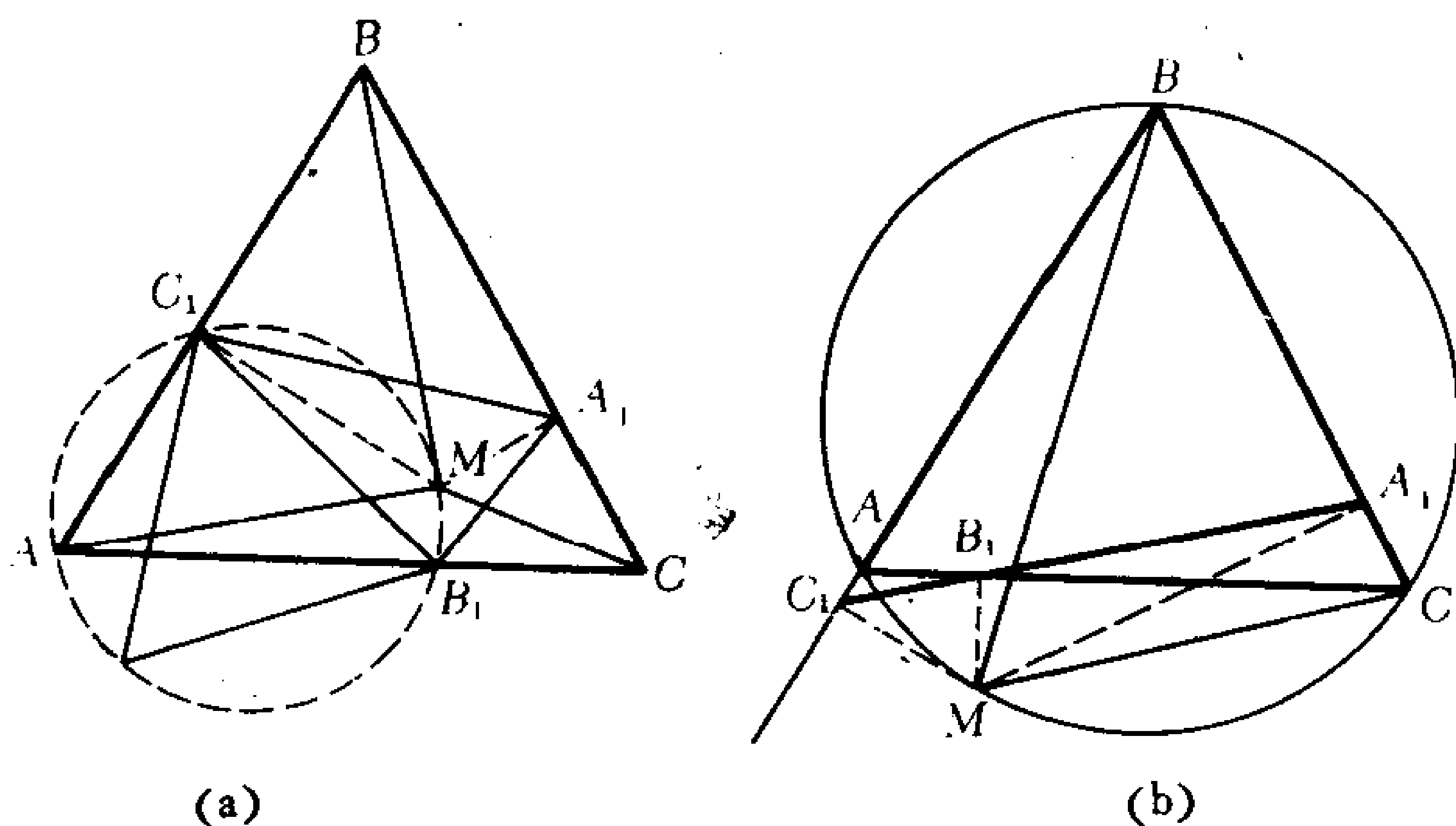


图 156

的边所作垂线的垂足共线，当且仅当 M 在这三角形的外接圆上（见问题 61）.

第四种解法. 应用托勒密定理①于四边形 $MABC$. 我们得到

$$MB \cdot AC \leqslant MA \cdot CB + MC \cdot AB,$$

并且等式成立，当且仅当四边形 $MABC$ 可以内接于圆. 但是 $AC = CB = AB$，因而

$$MB \leqslant MA + MC.$$

这就是所要证明的.

(b) 在给定三角形 ABC 的边 BC 上向外作等边三角形 BCA'（图 157）. 命 X 是平面上任意一点. 在 $\triangle XAA'$ 中，我们有

---

① 这个定理说：对于顶点依次为 A,B,C,D 的任意四边形，两对对边乘积之和大于或等于对角线的乘积，即

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

并且等式成立，当且仅当四边形可以内接于圆.

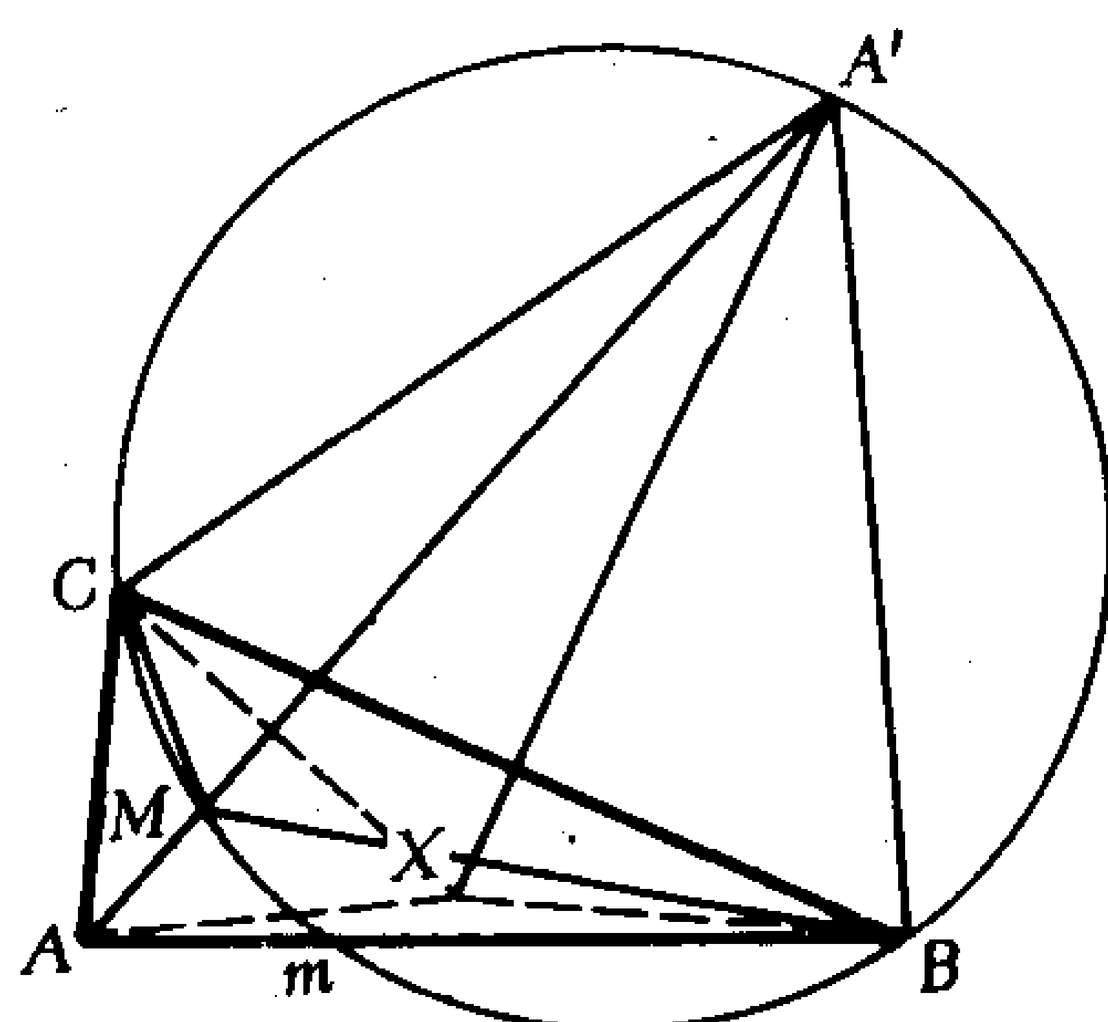


图 157

$$AA' \leqslant XA + XA',$$

并且等式成立，当且仅当 X 在线段 AA' 上. 进一步，由(a)有

$$XA' \leqslant XB + XC,$$

等式仅当 X 在 $\triangle A'BC$ 的外接圆的弧 CmB 上时成立.

由上面这些关系式，我们有

$$AA' \leqslant XA + XB + XC.$$

若 M 是 AA' 与 $\triangle A'BC$ 外接圆的交点，则

$$AA' = MA + MB + MC,$$

即有

$$MA + MB + MC \leqslant XA + XB + XC.$$

因而 M 满足问题 79 中的条件. 通过简单的计算，容易证明若 $\triangle ABC$ 有一个角等于 120°，则线段 AA' 和弧 CmB 交于这个角的顶点；而若三角形有一个角大于 120°，则线段 AA' 和弧 CmB 不相交. 在后一种情形，可以证明钝角的顶点仍然是这个极小问题的解.

82. 首先注意，所求的点 M 必定在 $\triangle ABC$ 之外并且在 $\angle ACB$ 之内. 事实上，假设 M 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，M' 是直线 CM 与边 AB 的交点〔图 158(a)〕. 则有 $AM' + BM' < AM + BM$ 和 $CM' > CM$，所以有

$$AM' + BM' - CM' < AM + BM - CM.$$

其次，假设 M 不在 $\angle ACB$ 内，则 M 有几种可能：首先假设 M

在角 ACB 的对顶角内，命 M' 是 M 关于直线 l 的对称点（这里 l 经过点 C 且平行于 AB〔图 158 (b)〕)，则 $M'C=MC$ 并且 $M'A<MA$，$M'B<MB$〔用图 158(b)中的记号，后面两个不等式可以由 $M'P<MP$ 得出〕，因而有

$$AM'+BM'-CM'<AM+BM-CM.$$

其次，假设 M 属于$\angle CAB$（但不在直线 AB 上！）并且不在$\triangle ABC$ 内，命 M' 是 M 关于直线 AB 的对称点〔图 158(c)〕. 则有 $AM'=AM$，$BM'=BM$ 和 $CM'>CM$〔用图 158(c) 中的记号，后面的不等式可以由 $M'Q>MQ$ 推得〕，所以有

$$AM'+BM'-CM'<AM+BM-CM.$$

类似地，假如 M 属于$\angle CBA$ 但不属于$\triangle ABC$，也导致矛盾. 最后，假设 M 落在$\angle ABC$ 的对顶角内（或在直线 AB 上）. 则有 $MC-MB<BC$ 和 $MA>BA$（后面的不等式可以由$\angle MBA>\angle DBA>90°$〔图 158(d)〕推得），因而

$$\begin{aligned}MA+MB-MC&=MA-(MC-MB)\\&>BA-BC=BA+BB-BC.\end{aligned}$$

同理可证 M 不能落在$\angle BAC$ 的对顶角内. 这样一来，M 不落在$\angle ACB$ 内的假设总会导致矛盾.

现在假设 X 是在$\angle ACB$ 内，但不属于$\triangle ABC$ 的任意一点. 将$\triangle ACX$ 按照从 C 到 B 的方向绕 A 旋转 60°角到达 $AC'X'$ 的位置〔图 159(a)〕. 由于 $AX=XX'$（因为$\triangle AXX'$ 是等边的）和 $CX=C'X'$，可见 $AX+BX-CX$ 等于 $X'X+BX-C'X'$. 这样，我们必须选取点 X，使得量 $BX+XX'-C'X'$ 尽可能地小. 但是因为显然有

$$C'B+BX+XX'\geqslant C'X',$$

所以我们总有

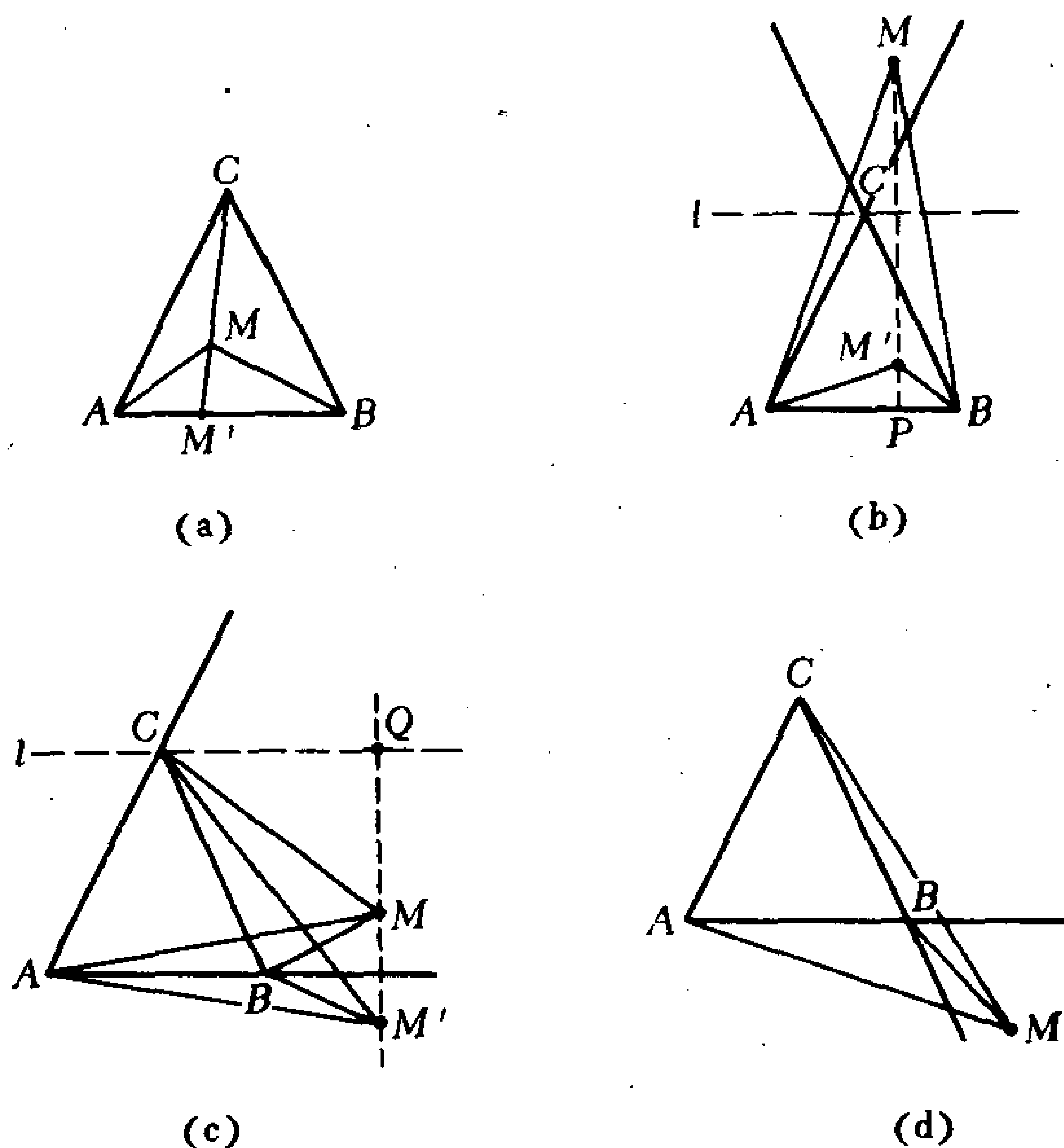


图 158

$$BX + XX' - C'X' \geqslant -C'B.$$

因此，如果我们能找到一点 M，使得

$$C'B + BM + MM' = C'M', \qquad (*)$$

即
$$BM + MM' - C'M' = -C'B,$$

则 M 就是所求的点，这里 M' 是用从 X 得到 X' 那样的方法由 M 得到的点.

现在必须考虑两种情形.

1° $\angle A = \alpha > 60°$，即 $AC = BC > AB$，所以 $\triangle ABC$ 不是等边的. 这时 C' 不与 B 重合，只要点 M 和 M' 都在直线 $C'B$ 上，则等式(*)成立〔图 159(a)〕. 由于 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 等于 $180° - 2\alpha$,

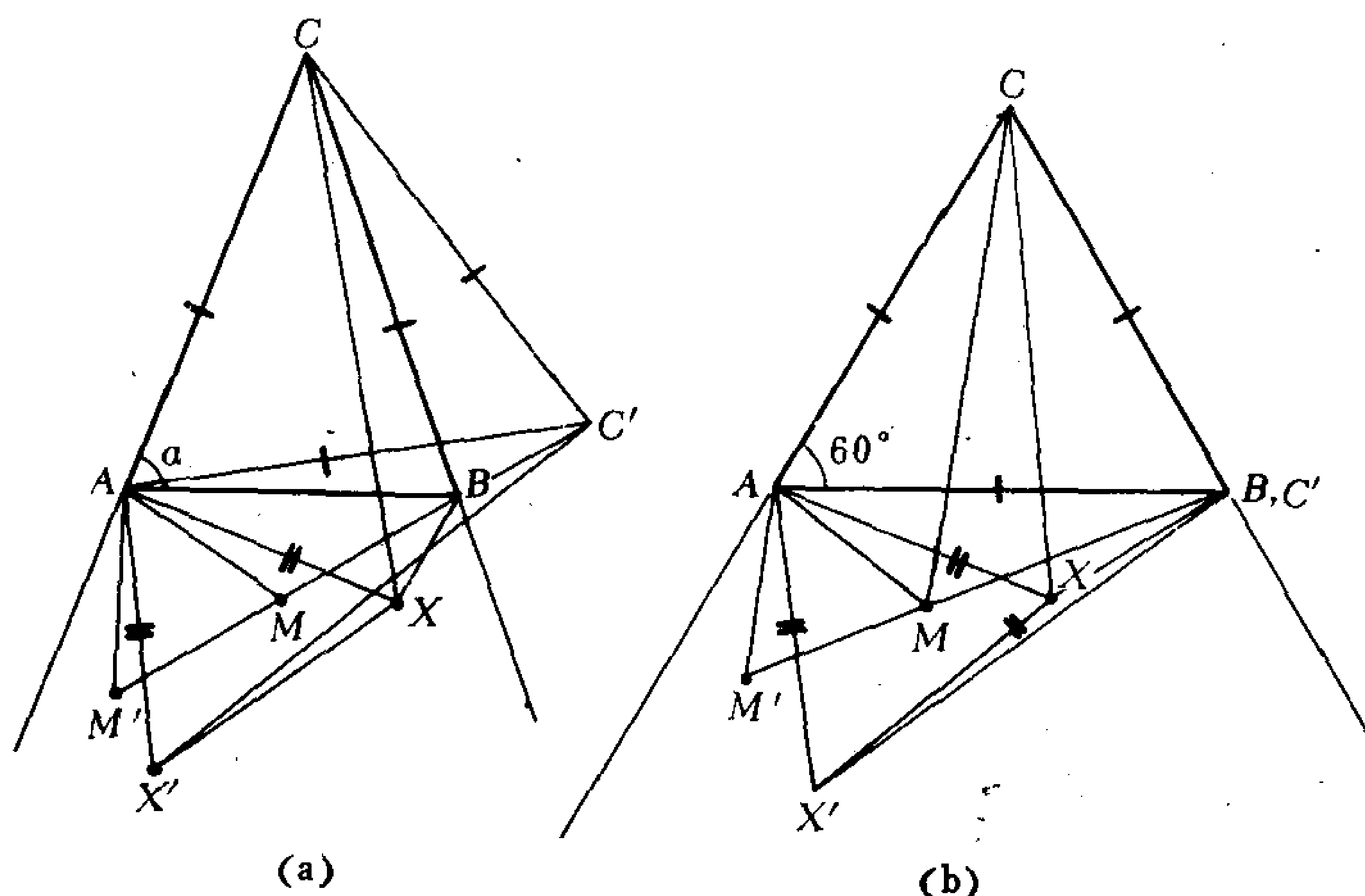


图 159

可见$\triangle BCC'$的$\angle BCC'$等于$60°-(180°-2\alpha)=2\alpha-120°$. 所以

$$\angle CC'B=\angle CBC'=150°-\alpha.$$

因而$\angle C'BA=\angle C'BC+\alpha=150°$. 于是，如果我们选取$M$，使$\angle C'BM=180°$，则有$\angle ABM=30°$. 此外，若选取$M$，使$\angle BMM'=\angle BMA+60°=180°$，则$\angle BMA=120°$. 由此即知有唯一的点$M$，使得$M$和$M'$都在直线$C'B$上，并且

$$AM+BM-CM=BM+MM'-C'M=-C'B.$$

这里点M由条件$\angle MBA=\angle MAB=30°$来刻划〔图 160(a)〕.

2° $\angle A=60°$，即$\triangle ABC$是等边三角形. 这时$C'=B$〔图 159 (b)〕. 如果折线BMM'实际上是一直线段，我们仍然有$BM+MM'-C'M'=-C'B(=0)$，并且$\angle BMA=120°$（因为$\angle AMM'=60°$）. 所有这样的点M〔见图 160 (b)〕都在$\triangle ABC$的外接圆的弧AB上；每个这样的点都满足本题的要求〔参阅

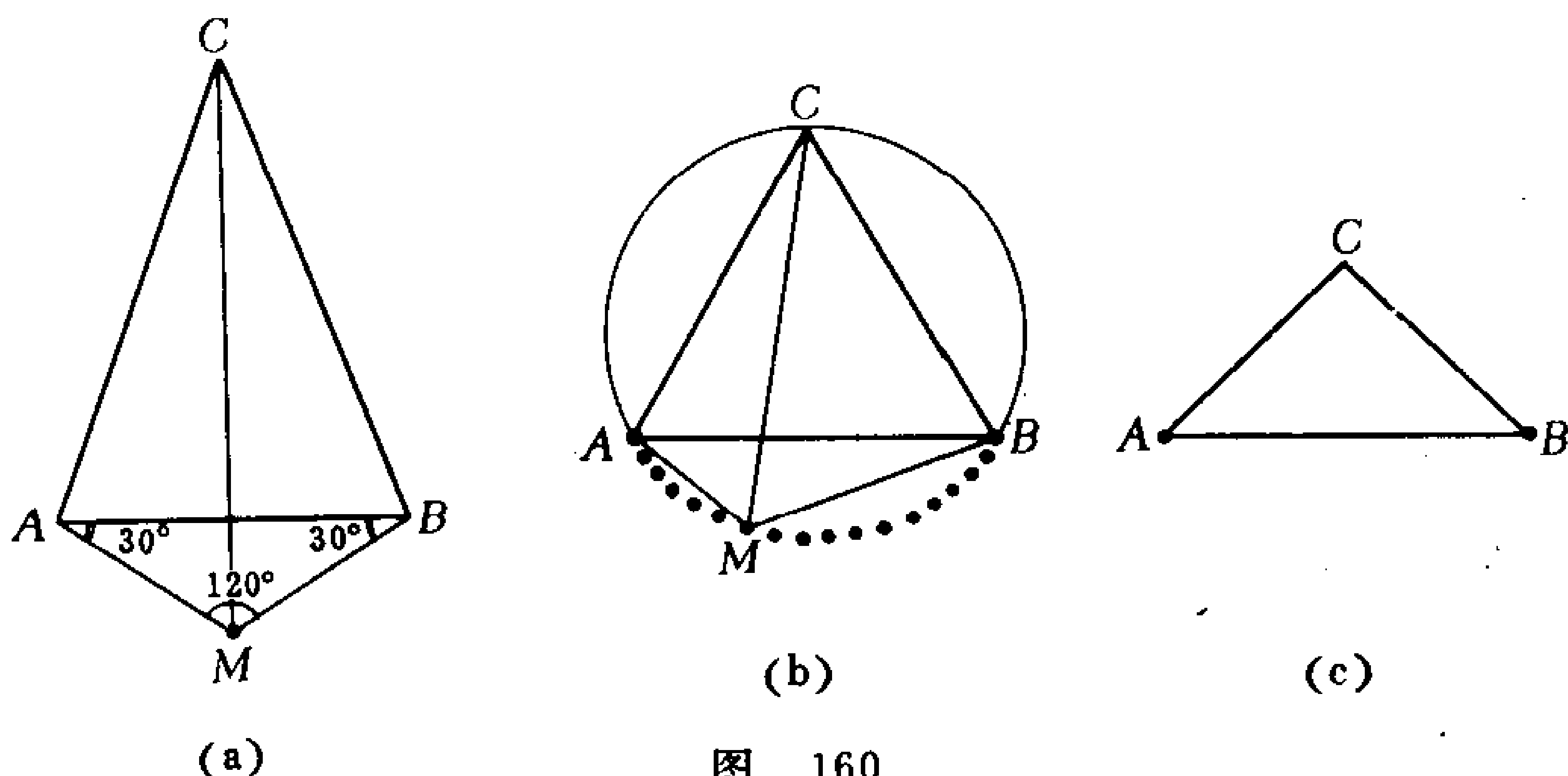


图 160

问题 81(a)〕.

注 当 $AC=BC<AB$ 且 $\angle A=\alpha<60°$ 时，上面所给的解法不成立．在这种情形可以证明：当点 M 与 $\triangle ABC$ 的顶点 A 或 B 重合时，式子 $AM+BM-CM$ 达到极小〔图 160(c)〕.

当 $\triangle ABC$ 是任意给定的三角形时，我们也可以提出找点 M，使式子 $MA+MB-MC$ 尽可能地小的问题．如果在这时等式（*）也对某个在 $\angle ACB$ 中，而不在 $\triangle ABC$ 内的点 M 成立，则不难看出：若 M 又满足

$$\angle AMC=\angle BMC=60°,$$

因而 $\angle AMB=120°$，则对这个点 M

$$MA+MB-MC(=-C'B)$$

将取最小值（这里点 C' 是由 C 经过按 AC 到 AB 的方向绕点 A 旋转 60° 角而得到，这个旋转把点 M 变到出现在等式（*）中的点 M'）. 但是要对等式（*）成立的条件作完全的描述，一般是十分困难的.

83. 首先考虑三个数 a, b, c 中两个较小的数之和不超过

第三个数的情形，例如，假设 $a \geqslant b+c$. 对任意一点 X，我们有

$$a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC \geqslant (b+c)XA + b \cdot XB + c \cdot XC$$

$$= b(XA + XB) + c(XA + XC) \geqslant b \cdot AB + c \cdot AC$$

（因为 $XA+XB \geqslant AB$, $XA+XC \geqslant AC$），因此当点 X 与点 A 重合时 $a \cdot XA+b \cdot XB+c \cdot XC$ 取最小值.

于是，仅剩下考虑存在边长等于 a, b, c 的三角形的情形. 在考虑这种情形时，可以分别遵循与问题 79，80 (a)，81 (b)，81 的解法相类似的下面四条途径.

第一种解法. 设 $A_0B_0C_0$ 是边长等于 a, b, c 的三角形，命 $\alpha = a/b, \gamma = c/b$. 设 X 是平面上任意一点. 以 A 为中心，γ 为相似系数，转角等于 $\triangle A_0B_0C_0$ 的 $\angle A_0$ 的螺旋相似（旋转方向是从 B 到 C 的方向）把 $\triangle AXC$ 变到 $\triangle AX'C'$（图 161）. 由假设

$$AX'/AX = \gamma = A_0B_0/A_0C_0, \qquad \angle XAX' = \angle B_0A_0C_0,$$

可知 $\triangle AX'X$ 和 $\triangle A_0B_0C_0$ 相似. 从它们的相似性，我们有 $XX'/AX = a/b = \alpha$，即 $XX' = \alpha AX$. 又由作法有 $C'X' = \gamma CX$. 于是

$$C'X' + X'X + XB = \gamma \cdot CX + \alpha \cdot AX + BX$$

$$= \frac{c \cdot CX + a \cdot AX + b \cdot BX}{b}.$$

所以，当折线 $BXX'C'$ 有最短长度时，$a \cdot AX+b \cdot BX+c \cdot CX$ 有最小值. 下面是两种可能的情形.

1° 直线 BC' 与给定三角形的边 AC 交于某点 D. 这时联结 B 和 C'，并且与线段 AC 相交的最短折线是线段 BC'. 用 $\angle AXX'$ 等于三角形 $A_0B_0C_0$ 的 $\angle C_0$ 这一事实，容易找到点 M. 为此，我们以线段 AD 为弦作弧，使得它所含的圆周角等于 $\triangle A_0B_0C_0$ 的 $\angle C_0$，并且使所作的弧与点 B 落在直线 AC 的同一侧. 如果这弧与线段 BC' 相交，则交点即为所求的点 M；如

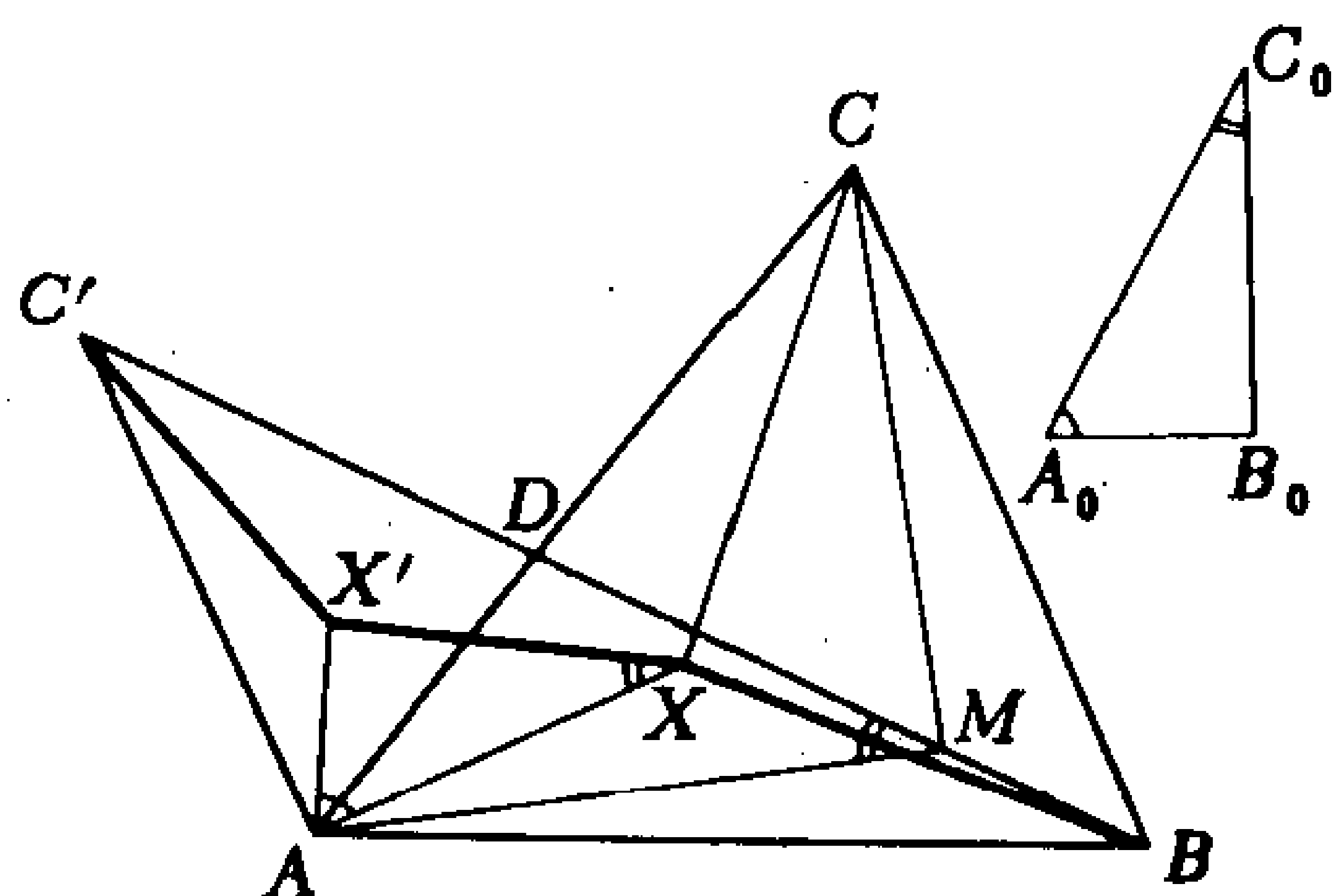


图 161

果这弧不与线段 BC' 相交，则所求的点 M 与 B 重合.

2° 若直线 BC' 不与 $\triangle ABC$ 的边 AC 相交，则与边 AC 相交的最短折线 $BXX'C'$ 是折线 BCC'，或是折线 BAC'. 显然，在前一种情形有 $M=C$，而在后一种情形有 $M=A$.

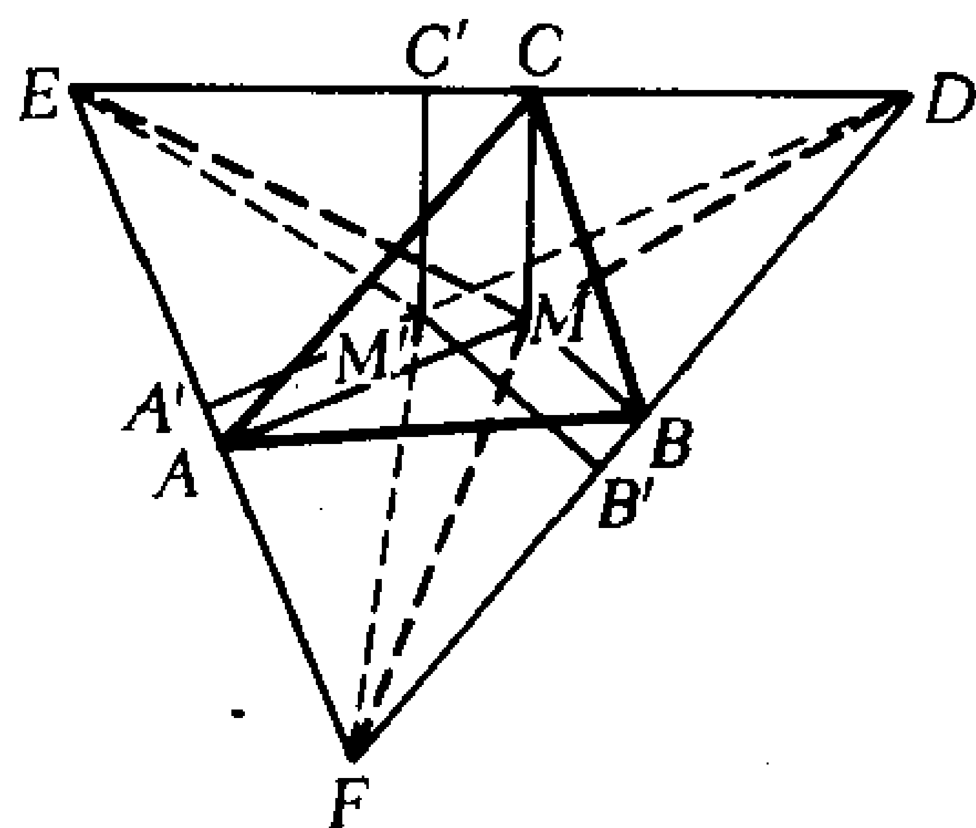


图 162

第二种解法. 若在 $\triangle DEF$ 中有 $EF:FD:DE=a:b:c$，则从任意一点 M 到 $\triangle DEF$ 各边的距离分别乘上 a,b,c 之后相加，所得的和是一个常数. 事实上，从图 162 我们有

$$\text{面积}(\triangle DEF)=\text{面积}(\triangle MEF)+\text{面积}(\triangle MFD)+\text{面积}(\triangle MDE),$$

或者若 $EF=ak, FD=bk, DE=ck$，则有

$$\text{面积}(\triangle DEF)=\frac{1}{2}MA\cdot ka+\frac{1}{2}MB\cdot kb+\frac{1}{2}MC\cdot kc,$$

于是

$$a\cdot MA+b\cdot MB+c\cdot MC=\frac{2\text{面积}(\triangle DEF)}{k}=\text{常数}.$$

这里 A,B,C 是从 M 向 $\triangle DEF$ 各边所作垂线的垂足.

现在作 $\triangle ABC$ 的外接三角形 DEF，使它的边长之比为 $a:$

$b:c$，并且使得过 A，B，C 所作的$\triangle DEF$ 各边的垂线交于一公共点 M（它的作法类似于问题 80（a）中的作法）．若 M 在$\triangle ABC$ 内，则 M 是我们的极小问题的解，这个结论可以用问题 80(a)的解答中同样的方法证明．若 M 在$\triangle ABC$ 之外，则本题的解是这三角形的顶点之一．

第三种解法．在给定三角形 ABC 中，作内接三角形 DEF，使得它的边成比例 $a:b:c$，并且具有性质：从$\triangle ABC$ 的顶点向$\triangle DEF$ 的边所作的垂线交于一公共点 M〔它的作法类似于问题 80(b)中的作法〕．

当$\triangle DEF$ 在通常意义下内接于$\triangle ABC$ 时（即它的所有顶点都在$\triangle ABC$ 的边上，而不是在它们的延长线上），那么正如问题 80（b）的解答中一样，可以证明 M 就是所求的点．否则本题的解由$\triangle ABC$ 的顶点之一给出．

第四种解法．我们用下面的命题〔它推广了 81（a）的结果〕：若在$\triangle ABC$ 中有 $BC:CA:AB=a:b:c$，则对平面上任意一点 M 有

$$b\cdot MB\leqslant a\cdot MA+c\cdot MC,$$

并且当 M 在$\triangle ABC$ 的外接圆的相应的弧上时等式成立．这命题的证明〔它可以用类似于问题 81（a）的解答中的几种方法来完成〕留给读者．

现在在给定三角形的边 BC 上作三角形 BCA'，使得 $BC:CA':A'B=a:b:c$，作这个三角形的外接圆．若 X 是平面上任意一点，则从$\triangle XAA'$ 可知

$$AA'\leqslant XA+XA',$$

并且等式仅对线段 AA' 上的点成立．此外，又有

$$a\cdot XA'\leqslant b\cdot XB+c\cdot XC,$$

并且仅对弧 BmC 上的点等式成立.

用 a 乘上面第一个关系式再把它加到第二个关系式，我们得到

$$a\cdot AA'\leqslant a\cdot XA+b\cdot XB+c\cdot XC,$$

并且仅当 M 是弧 BmC 与线段 AA' 的交点时等式成立，即

$$a\cdot AA'=a\cdot MA+b\cdot MB+c\cdot MC.$$

于是

$$a\cdot MA+b\cdot MB+c\cdot MC\leqslant a\cdot XA+b\cdot XB+c\cdot XC,$$

这说明 M 是本题的解.

若弧 BmC 不与线段 AA' 相交，则可以证明本题的解由 $\triangle ABC$ 的顶点之一给出.